M1 Analyse MAT1251M automne 2014

cours de Francis Clarke

Exercices pour la partie 2 : Fiche 3

Exer. 43 Soit X un espace vectoriel, et soient $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une famille de formes linéaires sur X. Prouver qu'il existe une norme sur X qui rend continue chaque élément de $\mathcal{F}$. Peut-on affirmer ce résultat lorsque la famille $\mathcal{F}$ n'est pas finie ?

Exer. 44 Soit L un sous-espace vectoriel d'un evn X.

(a) Montrer que la fonction $p(x) := d_L(x) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$ est positivement homogène et sous-additive.

(b) Soit $y \in X$ un élément de distance au moins $\delta > 0$ de L ; c-à-d, $\|y - u\| \geq \delta \ \forall u \in L$. Prouver l'existence de $\Lambda \in X^*$ qui satisfait $\|\Lambda\|_* \leq 1$ et tel que

$$\langle \Lambda, y \rangle = \delta \,, \quad \langle \Lambda, u \rangle = 0 \ \forall u \in L \,.$$

[Indication : Considérer le sous-espace $M := \{ty : t \in \mathbb{R}\}$ et l'application $f(ty) = t\delta$ sur M, dans le cadre du théorème de prolongement.]

Exer. 45 On pose

$$L = \{(y_n) : \exists\, (x_n) \in \ell^\infty, y_n = x_n - x_{n+1} \ \forall n \geq 1\}, \quad e = (1, 1, \ldots).$$

(a) Prouver que L est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ , et que $d_L(e) = 1$.

(b) Invoquer l'Exer. 44 pour déduire l'existence de $\Lambda \in (\ell^\infty)^*$ tel que $\|\Lambda\|_* = \langle \Lambda, e \rangle = 1$ et $\Lambda\big|_L = 0$. On appelle $\langle \Lambda, x \rangle$ la *limite de Banach* de x, notée $LIM(x)$.

(c) Prouver que $c_0 \subset \mathcal{N}(\Lambda)$ et que $LIM(x) = \lim_{n \to \infty} x_n$ quand $(x_n) \in c$. (Rappel : $\mathcal{N}(\Lambda) := \{x \in X : \Lambda x = 0\}$).

(d) Montrer que $LIM(x_1, x_2, \ldots) = LIM(x_2, x_3, \ldots) \ \forall (x_n) \in \ell^\infty$.

(e) Soit $z_K = (0, \ldots, 0, 1, 1 \ldots) \in \ell^\infty$ (K fois 0, ensuite 1). On a vu que la suite (z_K) tend faiblement* vers 0. Utiliser (c) pour montrer que z_K ne tend pas faiblement vers 0.

(f) Trouver $LIM(a, b, a, b, \ldots)$.

(g) Trouver $LIM(x)$ quand x est une suite périodique.

Exer.46 Prouver la partie (4) du théorème 2.54, à l'aide de l'Exer. 25. [Indication : si Λ est une forme linéaire continue, alors $\Lambda^{-1}[-1,1]$ contient un voisinage de 0.]

Exer.47 (Minimax de Ky Fan) Soit U une partie convexe compacte dans un evn, et soit V une partie convexe dans un espace vectoriel (U et V non vides). On se donne une fonction $f\colon U \times V \to \mathbb{R}$ telle que $u \mapsto f(u,v)$ est convexe sci $\forall v \in V$, et telle que $v \mapsto f(u,v)$ est concave $\forall u \in U$. Alors on a

$$\min_{u\in U}\sup_{v\in V} f(u,v) = \sup_{v\in V}\min_{u\in U} f(u,v), \text{ où } +\infty = +\infty \text{ est admis.}$$

Il s'agit de démontrer ce *théorème du minimax*. On pose $\alpha =$ le $\sup\min$, $\beta =$ le $\min\sup$.

1. Pourquoi peut-on écrire *min* ?
2. Prouver que $-\infty < \alpha \leq \beta$.

On peut donc limiter la démonstration au cas $\alpha < +\infty$. On supposera par la suite $\alpha < \beta$ afin d'obtenir une contradiction.

3. Montrer alors que les ensembles $U(v) := \big\{u \in U\colon f(u,v) \leq \alpha\big\}$ sont tels que
$$\bigcap_{v\in V} U(v) = \emptyset.$$
4. En déduire l'existence de $v_1, \ldots, v_n \in V$ tels que $\bigcap_{i=1,\ldots,n} U(v_i) = \emptyset$.
5. Prouver qu'en conséquent le point $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$ n'est pas dans l'ensemble
$$E := \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon x_i = f(u,v_i) + r_i, r_i \geq 0, u \in U\big\}.$$
6. Prouver que E est fermé et convexe.
7. En déduire l'existence de $\bar v \in V$ tel que
$$\alpha \;<\; \min_{u\in U} f(u,\bar v) \;\leq\; \alpha.$$

Cette contradiction achève la démonstration.

Exer.48 *(Mazur) Soit (x_n) une suite dans X qui converge faiblement vers x. On pose $C := \mathrm{co}\,\{x_n : n = 1, 2 \ldots\}$, l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_n : n \geq 1\}$. Montrer qu'il existe une suite (y_n) dans C telle que $\|y_n - x\|_X \to 0$. (C'est à dire, une suite de combinaisons convexes des x_n converge fortement vers x.)

Exer. 49 Soit (x_n) une suite qui converge faiblement vers $\bar{x}$. On pose

$$K_n = \overline{\mathrm{co}}\,\{x_n, x_{n+1}\dots\}.$$

Montrer que $\bigcap_1^\infty K_n = \{\bar{x}\}$.

Exer. 50 Soit (x_n) une suite dans ℓ^p $(1 < p < +\infty)$, où $x_n = (y_{i,n})_{i=1}^\infty$. Prouver que (x_n) converge faiblement vers 0 ssi la suite (x_n) est bornée dans ℓ^p et pour chaque i on a $\lim_{n\to+\infty} y_{i,n} = 0$.

Exer. 51 (sous-différentiel) Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction, où X est un evn, et soit x un point dans dom f. Un élément ζ dans X^* est un *sous-gradient* de f en x (au sens de l'analyse convexe) s'il satisfait

$$f(y) - f(x) \;\geq\; \langle \zeta, y - x\rangle \;\; \forall\, y \in X.$$

L'ensemble de tous les sous-gradients de f en x est désigné par $\partial f(x)$, le *sous-différentiel* de f en x.

(a) Prouver que $\partial f(x)$ est faiblement* fermé.

(b) Prouver que si $g(x) = \|x\|$, alors $\partial g(0)$ est la boule unité fermée dans X^*.

(c) Soit $\zeta \in \partial g(x)$, où $x \neq 0$. Montrer que $\langle \zeta, x\rangle = \|x\|$ et $\|\zeta\|_* = 1$.

(d) Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction convexe. Prouver qu'en tout point x de continuité de f, le sous-différentiel $\partial f(x)$ est non vide.

(e) Dans le contexte de la partie (d), montrer que $\partial f(x)$ est faiblement* compact.

Exer. 52 (von Neumann) On prend $X := \ell^p, 1 < p < +\infty$, et l'on désigne par e_n l'élément de X dont tous les termes sont nuls à part le n-ième, qui vaut 1.

1. La suite $\{e_n\}$ ne converge pas dans la topologie forte, mais converge faiblement vers 0.
2. On pose $y_{n,m} := e_n + ne_m$. Alors l'ensemble $E := \{y_{n,m} : m > n\}$ est fortement fermé dans X.
3. L'ensemble E admet 0 comme point d'adhérence faible, mais aucune suite dans E converge faiblement vers 0. (L'ensemble de toutes les limites faibles de suites dans E n'est donc pas faiblement fermé.)

Exer. 53 Soient x_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ des points dans un evn X. Prouver qu'il existe un point $\bar{\zeta} \in X^*$ qui minimise $\langle \zeta, x_0\rangle$ sur l'ensemble

$$\{\zeta \in X^* : \|\zeta\|_* \leq 1,\; \langle \zeta, x_i\rangle \;=\; 0\,(i = 1, 2, \dots, n)\}\,.$$

Exer. 54 Soit (ζ_i) une suite bornée de formes linéaires continues sur un evn séparable X. Prouver l'existence d'une sous-suite ζ_{i_j} telle que, pour chaque $x \in X$, on a $\lim_{j\to\infty}\langle \zeta_{i_j}, x\rangle = \langle \zeta, x\rangle$.

Exer. 55 Prouver que c_0, c, ℓ^1, et ℓ_c^∞ sont séparables, et que ℓ^∞ ne l'est pas.

Exer. 56 Montrer que les espaces ℓ^p $(1 \le p \le +\infty)$ ainsi que les espaces c et c_0 sont des espaces de Banach, mais pas ℓ_c^∞.

Exer. 57 On observe que la fonction

$$\| f \|_1 \; = \; \int_0^1 | f(t)| \, dt$$

définit une norme sur $C[0,1]$. Il s'avère que celle-ci n'est pas complète. Montrer que la suite $f_i(t) = [\min(2t, 1)]^i$ est de Cauchy par rapport à $\| \cdot \|_1$, mais que f_i ne converge pas dans cette norme vers un élément de $C[0,1]$.

Exer. 58 Soient X un evn et Y un espace de Banach. Prouver que l'espace vectoriel $C_b(X,Y)$ des fonctions continues bornées $g : X \to Y$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme

$$\|g\|_{C_b(X,Y)} \; = \; \sup_{x \in X} \|g(x)\|_Y \, .$$

Exer. 59 Soient X un evn non trivial et Y un espace de Banach. Prouver que l'espace vectoriel $\mathrm{Lip}_b(X,Y)$ des fonctions lipschitziennes bornées $g : X \to Y$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}_b(X,Y)} \; = \; \|\varphi\|_{C_b(X,Y)} \; + \sup_{\substack{x,\, u \in X \\ x \neq u}} \frac{\|\varphi(x) - \varphi(u)\|_Y}{\|x - u\|_X} \, .$$

Exer. 60 Soit X l'espace vectoriel $L^2(0,1)$ muni de la norme $\| \cdot \|_1$, i.e.,

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt,$$

et soit Y l'espace vectoriel $L^2(0,1)$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$ usuelle. Montrer que l'application $\Lambda : X \to Y$ définie par $\Lambda x = x$ admet un graphe fermé mais qu'elle n'est pas continue. Que peut-on en déduire sur $(X, \| \cdot \|_1)$? Montrer par cet exemple que la conclusion de l'Exercice 2.73 est fausse si les mots 'espace de Banach' sont remplacés par 'espace normé'.

Exer. 61 Soit (a_n) une suite de réels telle que

$$(x_n) \in c_0 \implies (a_n x_n) \in c_0 .$$

Prouver que $(a_n) \in \ell^\infty$. [Indication. Soit $\Lambda_k : c_0 \to c_0$ l'application $(x_n) \to (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_kx_k, 0, 0, \ldots)$; montrer que $\|\Lambda_k\|_* = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$.]

Exer. 62 Soit X un evn. Montrer qu'une partie S dans X est bornée ssi

$$H_S(\zeta) := \sup_{x \in S} \langle \zeta, x \rangle < \infty \ \forall \zeta \in X^*.$$

Soit X un espace de Banach. Montrer qu'une partie Σ dans X^* est bornée ssi

$$H_\Sigma(x) := \sup_{\sigma \in \Sigma} \langle \sigma, x \rangle < \infty \ \forall x \in X.$$

Exer. 63* Soit (Λ_n) une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach X dans un espace normé Y. On suppose que pour chaque $x \in X$, la limite $\Lambda x := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$ existe. Prouver que Λ est une application linéaire continue.

Exer. 64* Soient X un espace normé et A un sous-ensemble faiblement compact de X. Prouver que A est borné. En déduire qu'une suite qui converge faiblement est bornée.

Exer. 65* Soit X un espace de Banach et (ζ_n) une suite dans X^* qui converge simplement vers 0 : pour chaque $x \in X$, on a $\lim_{n\to\infty} \langle \zeta_n, x \rangle = 0$. Alors (ζ_n) est bornée dans X^*.

Exer. 66* Soit X un espace de Banach par rapport à deux normes différentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|x\|_1 \le c\|x\|_2 \ \forall x \in X.$$

Montrer que les normes sont équivalentes ; i.e., qu'il existe $d > 0$ tel que

$$\|x\|_2 \le d\|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

Fournir un contre-exemple dans le cadre où les mots 'èspace de Banach' sont remplacés par 'evn'.

Exer. 67* Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit T une application linéaire de X dans Y telle que

$$x_n \to 0, \ \Lambda \in Y^* \implies \Lambda T x_n \to 0.$$

Alors T est continue.

Exer. 68 Soient X, Y deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ un opérateur bijectif. Prouver que son inverse T^{-1} appartient à $\mathcal{L}_c(Y, X)$.

Exer. 69 Soient X et E des espaces de Banach et f une application linéaire de X dans E. Montrer que la continuité de f pour les topologies faibles de X et E implique la continuité de f pour les topologies fortes de X et E. [Indication : On pourra considérer le graphe de f.]

Exer. 70 Soit X un Banach de dimension infinie. Prouver que toute base vectorielle de X est non dénombrable. [Indication : Baire.] Montrer que ℓ_c^∞, par contre, admet une base dénombrable.

Exer. 71 Soit X un Banach de dimension infinie. On démontre que l'espace topologique $(X, \sigma(X, X^*))$ n'est pas localement dénombrable, ce qui implique que la topologie faible de X n'est pas métrisable. Supposons par l'absurde que la topologie faible admet une base locale dénombrable.

1. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de X^* telle que tout $g \in X^*$ soit une combinaison linéaire finie des f_n. [Indication : Exer. 25]
2. En déduire que dim $X^* < +\infty$ et conclure.
3. Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas la proposition 2.82 ?

Exer. 72 (Un théorème de Banach) Montrer que dans ℓ^1 une suite converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.