Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2015-2016

Contrôle continu
Lundi 10 octobre 2015

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (3 points)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec la norme euclidienne). On considère l'ensemble des fonctions Lipschitziennes bornées sur U notée $Lip(U, \mathbb{R})$.

$$Lip(U, \mathbb{R}) := \{f \in C^0(U, \mathbb{R}) : \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty \ et \sup_{x \neq y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||_2} < \infty\}$$

1. Montrer que l'application suivante est une norme sur $Lip(U, \mathbb{R})$.

$$||f||_{Lip} := \sup_{x \in U} |f(x)| + \sup_{x \neq y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||_2}$$

2. Soit l'ouvert $V := \{(x, y) \in U^2, x \neq y\}$. On munit les ensembles de fonctions continues bornées $C_b^0(U, \mathbb{R})$, et $C_b^0(V, \mathbb{R})$ de la norme sup $||.||_\infty$ du cours. Trouver une isométrie :

$$I : Lip(U, \mathbb{R}) \to C_b^0(U, \mathbb{R}) \oplus^1 C_b^0(V, \mathbb{R})$$

3. Montrer que $Lip(U, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Exercice 2 (5 points)

Soit $E = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites convergeant vers 0 avec la norme $||.||_\infty$. On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. On pose :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n} \quad \text{et} \quad M(u) = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Montrer que f est une forme linéaire continue et calculer $||f||_{E'}$.
2. Peut-on trouver un élément $u \in E$ telle que $f(u) = ||f||_{E'}$ et $||u||_E = 1$?
3. Rappeler le résultat du cours donnant le bidual E'' et trouver un $u \in E''$ EXPLICITE telle que $u(f) = ||f||_{E'}$ et $||u||_{E''} = 1$?
4. Montrer que $M : E \to E$ est linéaire continue et calculer la norme subordonnée $|||S|||$.
5. On rappelle que l'on a une isométrie $T : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to (c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ identifiant $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ au dual de E donnée par :

$$T(v)(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

Calculer la transposée $M^t : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

6. M^t et M sont-elles des isométries ?

Exercice 3 (6 points) Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$|||A|||_1 = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|, \qquad |||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Soient les espaces de suites sur $\mathbb{N}^2$:

$$c_0(\ell^1) := \{(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} : \forall i, \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}| < \infty \text{ et } \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}| = 0\} \text{ avec } ||b||_{c_0(\ell^1)} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}|.$$

$$\ell^1(\ell^\infty) := \{(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} : \sum_{i=0}^{\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty\} \text{ avec } ||a||_{\ell^1(\ell^\infty)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|.$$

On admet qu'on a bien des espaces vectoriels normés.

1. Montrer que
$$|||A|||_1 = \sup\{|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}| \quad : |||B|||_\infty \leq 1\}.$$
2. Soit $S_n : (M_n(\mathbb{R}), |||.|||_\infty) \to (c_0(\ell^1), ||.||_{c_0(\ell^1)})$ défini par $(S_n[A])_{i-1,j-1} = a_{i,j}$ pour $i, j \in [1, n]$ et $(S_n[A])_{i-1,j-1} = 0$ sinon.
Vérifier que S_n est une isométrie.
3. Trouver une isométrie surjective $T_2 : \ell^1(\ell^\infty) \to (c_0(\ell^1))'$ identifiant $\ell^1(\ell^\infty)$ au dual de $c_0(\ell^1)$.

Exercice 4 (6 points)
Soit $G = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées avec la norme $||.||_\infty$. Soit

$$S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

le décalage $S : G \to G$.

1. Rappeler le théorème de prolongement de Hahn-Banach que l'on utilisera par la suite.
2. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda \in (\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ telle que $\Lambda \circ S = \Lambda$ et
$$\Lambda((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} u_n$$
si la limite existe.
[Indication : On pourra considérer $F = Im(S - Id) + \mathbb{R}e$ avec e la suite constante égale à $e_n = 1$, $Id : G \to G$ l'application identité et étendre une forme linéaire bien choisie sur F].
3. Calculer la valeur de $\Lambda((a, b, a, b, a, b, ...))$.