Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2014-2015

Contrôle continu
Lundi 10 octobre 2015

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (3 points)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec la norme euclidienne). On considère l'ensemble des fonctions Lipschitziennes bornées sur U notée $Lip(U, \mathbb{R})$.

$$Lip(U, \mathbb{R}) := \{f \in C^0(U, \mathbb{R}) : \sup_{x\in U} |f(x)| < \infty \ et \ \sup_{x\neq y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||_2} < \infty\}$$

1. Montrons que l'application suivante est une norme sur $Lip(U, \mathbb{R})$.

$$||f||_{Lip} := \sup_{x\in U} |f(x)| + \sup_{x\neq y\in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||_2}$$

D'abord $||f||_{Lip} \geq 0$ et si $||f||_{Lip} = 0$ alors pour tout $x \in U$ $f(x) = 0$ donc $f = 0$. De plus soit $I(f) = (f, A_f)$ avec

$$A_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{||x - y||_2}$$

défini sur V comme au 2. On remarque que A_f est continue sur V (car le dénominateur continue non nul sur V) et bornée par définition de Lip donc $A_f \in C_b^0(V, \mathbb{R})$. On a par définition

$$||I(f)||_{C_b^0(U,\mathbb{R})\oplus^1 C_b^0(V,\mathbb{R})} = ||f||_\infty + ||A_f||_\infty = ||f||_{Lip}$$

Or clairement I est linéaire donc en utilisant que la norme sup est une norme et la linéarité de I, on trouve l'inégalité triangulaire et l'homogénéité :

$$||f+g||_{Lip} = ||I(f)+I(g)||_{C_b^0(U,\mathbb{R})\oplus^1 C_b^0(V,\mathbb{R})} \leq ||I(f)||_{C_b^0(U,\mathbb{R})\oplus^1 C_b^0(V,\mathbb{R})} + ||I(g)||_{C_b^0(U,\mathbb{R})\oplus^1 C_b^0(V,\mathbb{R})},$$

$$||\lambda f||_{Lip} = ||\lambda I(f)||_{C_b^0(U,\mathbb{R})\oplus^1 C_b^0(V,\mathbb{R})} = |\lambda| ||I(f)||_{C_b^0(U,\mathbb{R})\oplus^1 C_b^0(V,\mathbb{R})} = |\lambda| \ ||f||_{Lip}.$$

2. Soit l'ouvert $V := \{(x, y) \in U^2, x \neq y\}$. On munit les ensembles de fonctions continues bornées $C_b^0(U, \mathbb{R})$, et $C_b^0(V, \mathbb{R})$ de la norme sup $||.||_\infty$ du cours. On a trouver l'isométrie au 1. :

$$I : Lip(U, \mathbb{R}) \to C_b^0(U, \mathbb{R}) \oplus^1 C_b^0(V, \mathbb{R})$$

3. Montrons que $Lip(U, \mathbb{R})$ est un espace de Banach. Comme il est isométriquement isomorphe à l'image de I, il suffit de montrer que cette image est fermé, puisqu'alors cette image sera un fermé du complet $C_b^0(U, \mathbb{R}) \oplus^1 C_b^0(V, \mathbb{R})$ et sera donc complet.
Mais si $I(Lip(U, \mathbb{R})) = \{(f, g) : \forall x \neq y : \ g(x, y)||x-y||_2 = f(x)-f(y)\}$ Comme $ev_{(x,y)}(f, g) = g(x, y)$ et $ev_x(f, g) = f(x)$ sont continues on trouve que

$$f_{x,y} := ||x - y||_2 ev_{(x,y)} - ev_x + ev_y$$

et donc son noyau est fermé et donc par intersection : $I(Lip(U, \mathbb{R})) = \cap_{(x,y)\in V)} Ker(f_{x,y})$ et aussi fermé.

Exercice 2 (5 points)
Soit $E = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites convergeants vers 0 avec la norme $||.||_\infty$. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On pose :

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

et

$$M(u) = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Avec la notation du 5 $f = T(v)$ avec $v = (\frac{1}{2^n})$ est donc une forme linéaire continue et calculons

$$||f||_{E'} = ||v||_{\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

2. Si $u \in E$ avec $||u|| \leq 1$ alors pour $n \geq N$ grand $|u_n| \leq 1/2$ de sorte que

$$|f(u)| \leq = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^N} < 2 = ||f||_{E'}$$

3. En identifiant le bidual $E'' \simeq \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et soit $u_n = 1 \forall n, u_n \in E''$ qui est EXPLICITE. On voit que telle que $u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 = ||f||_{E'}$ et $||u||_{E''} = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1 = 1$.
4. Montrons que $M : E \to E$ est linéaire continue. La linéarité est évidente, pour la continuité, on note que

$$||M(u)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{2n}| \leq ||u||_\infty$$

donc $|||M||| \leq 1$. Or $M(1, 0, 0, 0, ...) = (1, 0, 0, 0, ...)$ donc $|||M||| = 1$.

5. On rappelle que l'on a une isométrie $T : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to (c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ identifiant $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ au dual de E donnée par :

$$T(v)(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

$M^t : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est caractérisé par la relation :

$$T(M^t v)(u) = T(v)(S(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n M^t(v)_n$$

avec

$$M^t(v)_{2n} = v_n, M^t(v)_{2n+1} = 0$$

qui défini donc M^t.

6. On voit que M^t est isométrique alors que M ne l'est pas car $M(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...) = 0$.

Exercice 3 Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$|||A|||_1 = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|, \qquad |||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Soient les espaces de suites sur $\mathbb{N}^2$:

$$c_0(\ell^1) := \{(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} : \forall i, \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}| < \infty \text{ et } \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}| = 0\} \text{ avec } ||b||_{c_0(\ell^1)} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}|.$$

$$\ell^1(\ell^\infty) := \{(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} : \sum_{i=0}^{\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty\} \text{ avec } ||a||_{\ell^1(\ell^\infty)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|.$$

1. Montrons que

$$|||A|||_1 = \sup\{|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}| \quad : |||B|||_\infty \leq 1\}.$$

$\geq$ est détaillé dans le calcul pour T plus bas. Pour l'autre inégalité soit j_i telle que $a_{i,j_i} = \max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|$ et $b_{i,j} = \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} 1_{a_{ij}\neq 0} 1_{j=j_i}$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| 1_{j=j_i} = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}| = |||A|||_1$$

et

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ij}|} 1_{a_{ij}\neq 0} \leq 1$$

On déduit donc l'autre inégalité $\leq$.

2. Rappelons que $(S_n[A])_{i-1,j-1} = a_{i,j}$ et 0 si on n'a pas $i, j \leq n$ d'où (comme les termes sont nuls à partir d'un certain rang)

$$||S_n(A)||_{c_0(\ell^1)} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |S_n(A)_{ij}| = \sup_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ||A||_\infty$$

3. Montrons que $T_2 : \ell^1(\ell^\infty) \to (c_0(\ell^1))'$ est bien défini par :

$$T_2(a)(b) := \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}b_{ij}$$

et que T est une isométrie surjective. D'abord

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}b_{ij}| &\leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{ik}|)|b_{ij}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{ik}|) \sup_{l\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{lj}| = ||a||_{\ell^1(\ell^\infty)} ||b||_{c_0(\ell^1)}\end{aligned}$$

donc la série définissant T_2 est absolument convergente et $T(_2a) \in (c_0(\ell^1))'$ de norme

$$||T_2(a)|| \leq ||a||_{\ell^1(\ell^\infty)}.$$

De plus comme S_n est une isométrie :

$$||T_2(a)|| \geq \sup_{|||b|||_\infty \leq 1} |T_2(a)(S_{n+1}(b))| = |||(a_{i+1,j_1})_{0\leq i,j\leq n}|||_1 = \sum_{i=0}^{n} \sup_{j\leq n} |a_{ij}|$$

Enfin comme pour $n \leq m$ $\sum_{i=0}^{n} \sup_{j\leq m} |a_{ij}| \leq \sum_{i=0}^{m} \sup_{j\leq m} |a_{ij}|$ on peut faire tendre $m \to \infty$ puis $n \to \infty$ dans la relation

$$||T_2(a)|| \geq \sum_{i=0}^{n} \sup_{j\leq m} |a_{ij}|$$

pour obtenir

$$||T_2(a)|| \geq ||a||_{\ell^1(\ell^\infty)}.$$

Il reste à voir la surjectivité. si $f \in (c_0(\ell^1))'$ soit $J_m : \ell^1 \to (c_0(\ell^1))$ défini par $J_m((u_n)) = u_n 1_{i=m})_{(i,n)\in\mathbb{N}^2}$ Il est facile de voir que J_m est isométrique de sorte que $f \circ J_m \in (\ell^1(\mathbb{N}))'$ donc d'après le cours $T^{-1}(f \circ J_m) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

Montrons que $K(f)_{m,n} = [T^{-1}(f \circ J_m)]_n$ défini un élément de $\ell^1(\ell^\infty)$ et que $T_2(K(f)) = f$.

Or

$$\begin{aligned} T_2(K(f))(S_n(A)) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i-1,j-1} K(f)_{i-1,j-1} = \sum_{i=1}^{n} T(T^{-1}(f \circ J_{i-1}), (a_{i-1,j+1})_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f \circ J_{i-1}((a_{i,j+1})_j) \\ &= f(S_n(A)) \end{aligned}$$

En utilisant la formule du sup sur $S_n(A)$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} |K(f)_{ij}| \leq ||f||_{(c_0(\ell^1))'}$$

et donc en prenant $n \to \infty, m \to \infty$ on obtient $K(f)_{m,n} \in \ell^1(\ell^\infty)$ comme souhaité et $T_2(K(f)) - f$ s'annule sur $Im(S_n)$ pour tout n et comme l'union est dense dans $c_0(\ell^1)$, on obtient $T_2(K(f)) = f$ d'où la surjectivité de T_2.

Exercice 4 (5 points)

Soit $G = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées avec la norme $||.||_\infty$. Soit

$$S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

le décalage $S : G \to G$.

1. Montrons qu'il existe une forme linéaire continue $\Lambda \in (\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ telle que $\Lambda \circ S = \Lambda$ et

$$\Lambda((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} u_n$$

si la limite existe.

On pourra considère $F = Im(S - Id) + \mathbb{R}e$ avec e la suite constante égale à $e_n = 1$, $Id : G \to G$ l'application identité et étendre une application linéaire bien choisie sur F. On remarque que $F = Im(S - Id) \oplus \mathbb{R}e$ car si $S(x) - x = \lambda e$ on $u_{n+1} - u_n = \lambda$ donc $u_n = n\lambda + u_0$ qui n'est borné que si $\lambda = 0$, d'où $Im(S - Id) \cap \mathbb{R}e = \{0\}$.

On peut donc poser pour $f \in Im(S - Id)$,

$$\Lambda(f + te) = t$$

ce qui est la valeur attendue pour que la formule fonctionne. Pour appliquer Hahn-Banach, il faut borner la norme de Λ Or $(f+te)_n = (u_{n+1} - u_n + t)$
Si il existe un certain rang à partir duquel u_n est croissante, comme elle est borné elle converge vers $u_n \to l$ et donc $(f+te)_n \to l - l + t = t$ donc

$$|\Lambda(f+te)| = |t| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |(f+te)_n|$$

On n'a la même conclusion si u_n est décroissante à partir d'un certain rang. Dans le second cas, f n'est ni croissante ni décroissante à partir d'un certain rang, pour tout n il existe $m, l \geq n$ tel que $u_{m+1} - u_m \geq 0$ et $u_{l+1} - u_l \leq 0$ d'où $(f+te)_m \geq t, (f+te)_l \leq t$
Donc si $t > 0$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |(f+te)_n| \geq (f+te)_m \geq t = |t|$$

et si t négatif

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |(f+te)_n| \geq -(f+te)_l \geq -t = |t|$$

donc encore dans tous les cas

$$|\Lambda(f+te)| = |t| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |(f+te)_n|.$$

Comme on a distingué tous les cas possibles pour f, t, on a donc

$$||\Lambda||_{G'} \leq 1$$

Montrons que toute extension de Λ donné par Hahn-Banach convient. En effet $\Lambda \circ S = \Lambda$ d'après la valeur sur $Im(S - Id)$ et de plus il suffit de voir qu'une suite $x_n \to 0$ est dans l'adhérence de $Im(S - Id)$.
En effet, On sait qu'une suite fini est évidemment dans $Im(S-Id)$ (résoudre un système linéaire fini) et celles-ci sont denses dans $c_0(\mathbb{N})$. Donc si $l = \lim_{n\to\infty} u_n$ on déduit par continuité de Λ que

$$\Lambda((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Lambda((u_n - l)_{n\in\mathbb{N}} + le) = l + \Lambda((u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}) = l.$$

2. La valeur de $\Lambda((a, b, a, b, a, b, ...)) = \frac{a+b}{2}$. car

$$(a, b, a, b, a, b, ...) - \frac{a+b}{2} = (\lambda, -\lambda, \lambda, ...) = \lambda(S(e - M(e)) - e + M(e))$$

avec $\lambda = (a-b)/2$.