Université Claude Bernard — Mathématiques
M1G Analyse — 2016-2017

Contrôle continu
Lundi 10 octobre 2016

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (6 points) On fixe $1 \leq p < q < \infty$ et Leb la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

On rappelle et on pourra utiliser sans démonstration l'inégalité pour $a > 0, b > 0, \alpha \in [0,1]$:

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

1. Soit $x \in L^q(]0,1[, Leb)$. Montrer que $x \in L^p(]0,1[, Leb)$ et que $\lim_{p \to q, p \leq q} ||x||_p = ||x||_q$.
2. On suppose maintenant $y \in L^\infty(]0,1[, Leb)$. Donner une inégalité entre $||y||_p$ et $||y||_q$
   En déduire que la limite suivante existe : $\lim_{p\to\infty} ||y||_p < \infty$.
3. On suppose toujours $y \in L^\infty(]0,1[, Leb)$. Montrer que $\lim_{p\to\infty} ||y||_p = ||y||_\infty$.
4. On suppose que $f \in L^q(]0,1[, Leb)$ pour tout $1 < q < \infty$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $||f||_q \leq C$ pour tout $1 < q < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty(]0,1[, Leb)$.
5. Trouver une fonction dans $L^q(]0,1[, Leb)$ pour tout $1 < q < \infty$ mais pas dans $L^\infty(]0,1[, Leb)$.

Exercice 2 (5 points) Soit $1 \leq p < \infty$. On rappelle que $\ell^p(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des suites (réelles) indicées par $\mathbb{Z}$ de puissance p-ième sommable :

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : ||(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}||_p^p := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{-n}|^p < \infty \right\}.$$

On le munit de sa norme $||.||_p$ usuelle. De même, $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des suites bornées et $||(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

1. Montrer que si $f \in \ell^1(\mathbb{Z}), g \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le produit de convolution :
   $$(f * g)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{n-m} g_m$$
   est bien défini, $f * g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et
   $$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$
2. Montrer que pour $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^p(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que si $f \in \ell^1(\mathbb{Z}), g \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $p \in [1, +\infty[$, alors $f * g \in \ell^p(\mathbb{Z})$ et
   $$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$
4. Vérifier que $T_f : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ définie par $T_f(g) = f * g$ est une application linéaire continue et montrer que sa norme subordonnée est :
   $$|||T_f||| = ||f||_1.$$

Exercice 3 (9 points+ Bonus : 1 point)

Soient $1 \le p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}, Leb)$. On rappelle que $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$, $h \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$\omega_f(h) = ||\tau_h(f) - f||_p.$$

On définit finalement pour $0 < s \le 1$, l'espace (dit espace de Besov)

$$B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}, Leb) : \sup_{|h|\neq 0} \frac{\omega_f(h)}{|h|^s} < \infty \right\}.$$

On rappelle (et on ne demande pas de remontrer) que si E, F sont des espaces de Banach, l'espace $E \oplus^1 F = (E \times F, ||.||_1)$ est l'espace de Banach de norme :

$$||(e,f)||_1 = ||e||_E + ||f||_F, e \in E, f \in F.$$

1. Montrer que l'application suivante $f \mapsto ||f||_{p,s}$ est une norme sur $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ définie par :

$$||f||_{p,s} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \right)^{1/p} + \sup_{|h|\neq 0} \frac{\omega_f(h)}{|h|^s}.$$

2. Soit l'ouvert $V = \{h \in \mathbb{R}, h \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. On munit l'ensemble des fonctions continues bornées de V à valeur $L^p(\mathbb{R}, Leb)$, noté $C^0_b(V, L^p(\mathbb{R}, Leb))$, de la norme sup : $||f||_\infty = \sup_{h \in V} ||f(h)||_p$: Vérifier que
$$I : B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}, Leb) \oplus^1 C^0_b(V, L^p(\mathbb{R}, Leb)),$$
définie par $I(f) = (f, g_f)$ est une isométrie, si on définit : $g_f(h) = \frac{\tau_h(f)-f}{|h|^s}, h \in V$.
3. Montrer que $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.
4. Montrer que pour $s < t$, on a $B^t_{p,\infty}(\mathbb{R}) \subset B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$.
5. Soient $(\rho_n)_{n\ge1}$ une suite régularisante et $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$, montrer que la convolution $\rho_n * f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ et qu'on a :
$$||\rho_n * f||_{p,s} \le ||f||_{p,s}.$$
6. On considère le cas $s = 1$ et $f \in B^1_{p,\infty}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$||(\rho_n * f)'||_p \le ||f||_{p,1}.$$

7. Soit $f \in B^1_{p,\infty}(\mathbb{R}), p > 1$. En déduire que si $1/p + 1/q = 1$, alors il existe un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle telle que :

$$\forall x \notin A, \forall y \notin A, \quad |f(x) - f(y)| \le ||f||_{p,1}|x-y|^{1/q}.$$

8. **(Bonus 1 point)** Avec le f de la question précédente, en déduire, qu'il existe $g \in B^1_{p,\infty}(\mathbb{R})$ $1/q$-Hölderienne tel que $f = g$ presque partout. (Indication, montrer puis utiliser que A^c est dense dans $\mathbb{R}$).