Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2016-2017

Correction du Contrôle continu 1

Exercice 1 (6 points) On fixe $1 \leq p < q < \infty$ et Leb la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$

1. Soit $x \in L^q(]0,1[, Leb)$. Montrons que $x \in L^p(]0,1[, Leb)$.
   On a par Hölder avec $1/p = 1/q + 1/r, r > 1$, $||x||_p \leq ||x||_q ||1||_r$ et $||1||_r^r = \int 0^1 dt 1 = 1$ d'où $||x||_p \leq ||x||_q < \infty$.
   Montrons que $\lim_{p\to q, p\leq q} ||x||_p^p = ||x||_q^q$.
   Méthode A (TCD) : Or si $|x(t)| \geq 1, |x(t)|^p \leq |x(t)|^q$ et donc pour tout t, $|x(t)|^p \leq |x(t)|^q + 1 =: g(t)$ Or comme $x \in L^q(]0,1[, Leb)$, $g \in L^1(]0,1[, Leb)$ est une domination et comme $\lim_{p\to q, p\leq q} |x(t)|^p = |x(t)|^q$ p.P. par continuité de l'exponentielle vu $|x(t)|^p = \exp(p\log(|x(t)|))$ on déduit du TCD :
   $$\lim_{p\to q, p\leq q} ||x||_p^p = \lim_{p\to q, p\leq q} \int_0^1 |x(t)|^p dt = \int_0^1 |x(t)|^q dt = ||x||_q^q.$$
   Méthode B (TCM) : Formellement, on prend une suite $p_n \to q$ croissante et les limites sont le long de cette suite. $p \to |x(t)|^p$ n'est pas monotone pour tout t, il faut séparer deux ensembles $A = \{t : |x(t)| \geq 1\}$ et $B = \{t : |x(t)| < 1\}$
   Sur A $p \to |x(t)|^p \geq 0$ est croissante et $|x(t)|^p \to |x(t)|^q$ donc par TCM
   $$\int_A |x(t)|^{p_n} dt \to \int_A |x(t)|^q dt$$
   Sur B $p \to |x(t)|^p \geq 0$ est décroissante et le TCM ne s'applique pas directement mais comme on est sur un espace de probabilité (NE PAS OUBLIER CETTE HYPOTHESE) on peut écrire $p \to 1 - |x(t)|^p$ croissante sur B d'où
   $$\int_B 1 - |x(t)|^{p_n} dt \to \int_B 1 - |x(t)|^q dt$$
   donc
   $$\int_B |x(t)|^{p_n} dt \to \int_B |x(t)|^q dt.$$
   (Sur B on peut aussi utiliser comme en TD le TCD dominé par 1.
   Ex où le TCM ne marche pas en version décroissante, $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^2} dx$ est infinie pour tout $\alpha > 1$ mais de cas limite $\alpha = 1$ converge (intégrale de Bertrand) et $+\infty \not\to C < \infty$.
   Méthode C (Fatou) : $|x(t)|^p$ est positive donc
   $$||x||_q^q = \int_0^1 \liminf_{p_n\to q} |x(t)|^{p_n} dt \leq \liminf_{p_n\to q} \int_0^1 |x(t)|^{p_n} dt = \liminf_{p_n\to q} ||x||_{p_n}^{p_n}.$$
   Or on a vu $||x||_{p_n} \leq ||x||_q$ donc
   $$\limsup_{p_n\to q} ||x||_{p_n}^{p_n} \leq \limsup_{p_n\to q} ||x||_q^{p_n} = ||x||_q^q$$

d'où égalité des limite sup et inf et limite existe.

Pour conclure 2 méthodes.

Méthode 1. Or si $b \geq a > 0$ on a vu en TD, $b^{1/p} \leq a^{1/p} + (b-a)^{1/p}$ donc $\left|b^{1/p} - a^{1/p}\right| \leq |b-a|^{1/p}$ et par symétrie c'est vrai pour tout a, b donc

$$\left|||x||_p - ||x||_q^{q/p}\right| \leq |\ ||x||_p - ||x||_q|^{1/p} \leq |\ ||x||_p - ||x||_q|^{1/q} \to_{p\to q} 0$$

la dernière inégalité pour p assez proche de q pour avoir $|\ ||x||_p - ||x||_q| \leq 1$ car si $a \leq 1$ vu $1/p > 1/q$, $a^{1/p} \leq a^{1/q}$. Puis on a $||x||_q^{q/p} \to ||x||_q$ d'où

$$\lim_{p\to q, p\leq q} ||x||_p = ||x||_q.$$

Méthode 2. Si $x = 0$ la limite est évidente, sinon, $||x||_p = \exp(\ln(||x||_p^p)/p)$ et $g(s,t) = \exp(\ln(s)/t)$ est continue du couple sur $\mathbb{R}_+^2$. donc on passe à la limite $(||x||_p^p, p) \to (||x||_q^q, q)$ pour conclure.

2. On suppose maintenant $y \in L^\infty(]0,1[, Leb)$. On a par Hölder avec $1/p = 1/q + 1/r, r > 1$, $||y||_p \leq ||y||_q ||1||_r$ et $||1||_r^r = \int 0^1 dt 1 = 1$ d'où $||y||_p \leq ||y||_q$ et $p \mapsto ||y||_p$ est croissante, bornée par $||y||_\infty$ (par le cas $q = \infty$ de Hölder et non une limite que l'on ne connait pas encore) donc converge soit $\lim_{p\to\infty} ||y||_p \leq ||y||_\infty$ existe.
3. Supposons par l'absurde $\lim_{p\to\infty} ||y||_p = C < c < ||y||_\infty$. donc par définition, $A = \{t \in]0,1[, |y(t)| \geq c\}$ on a $Leb(A) > 0$. Donc par Markov $Leb(A) \leq ||y||_p^p / c^p$ donc en passant à la limite $||y||_p \geq cLeb(A)^{1/p}$, on obtient : $C = \lim_{p\to\infty} ||y||_p \geq c > C$. C'est la contradiction cherchée.
4. On suppose que $f \in L^q(]0,1[, Leb)$ pour tout $1 < q < \infty$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $||f||_q \leq C$ pour tout $1 < q < \infty$.

   Méthode 1 :On sait toujours $\lim_{p\to\infty} ||f||_p \leq C$ existe et on peut prendre $C = \lim_{p\to\infty} ||f||_p$ Comme avant on déduit $Leb(A) = 0$ donc $f \in L^\infty(]0,1[, Leb)$.

   Méthode 2. On se réduit au cas précédent en considérant $f1_{\{|f|\leq M\}}$dans L^∞ alors, $||f1_{\{|f|\leq M\}}||_q \leq ||f||_q \leq C$ et donc $\lim_q \to \infty ||f1_{\{|f|\leq M\}}||_q = ||f1_{\{|f|\leq M\}}||_\infty \leq C$. Enfin cela veut dire $|f| \notin]C, M]$ p.p. en prenant $M = n$ ce qui donne un nombre dénombreble de condition on déduit p.p.

$$\forall n |f| \notin]C, n]$$

   donc $|f| \leq C$ p.p.
5. Méthode 1 : On note que $f(t) = \ln(t)$ est dans $L^q(]0,1[, Leb)$ pour tout $1 < q < \infty$ (intégrale de Bertrand $\alpha = 0 < 1$ mais pas dans $L^\infty(]0,1[, Leb)$.

   Méthode 2 avec des suites $f(t) = \sum_{n=1}^\infty n 1_{]1/2^{n+1}, 1/2^n]}(t)$ alors f non borné car ses valeurs $n\ to \infty$ mais $\int |f(t)|^q dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^q}{2^{n+1}} < \infty$. (par exemple série $\sum z^n n^q$ de rayon de convergence 1).

Exercice 2 (5 points) Soit $1 \leq p < \infty$. On rappelle que $\ell^p(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des suites indicées par $\mathbb{Z}$ de puissance p-ième sommable :

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{-n}|^p < \infty \right\}.$$

On le munit de sa norme $||.||_p$ usuelle. De même, $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des suites bornées et $||(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

1. Montrons que si $f \in \ell^1(\mathbb{Z}), g \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le produit de convolution :

$$(f * g)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{n-m} g_m$$

est bien définie, $f * g \in \ell^1(\mathbb{N})$ et

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Comme en cours on considère $|f| * |g|$, par Fubini-Tonelli :

$$|||f| * |g|||_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f_{n-m}||g_m| = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_{n-m}||g_m| = ||f||_1 ||g||_1 < \infty$$

donc pour tout n $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{n-m} g_m$ est sommable (donc la somme de la série est bien définie) ; $(f * g)_n \leq (|f| * |g|)_n$ donc $||f * g||_1 \leq |||f| * |g|||_1$ ce qui conclut.

2. Montrons que pour $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^p(\mathbb{Z})$. En effet si $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ en remplaçant x par $x/||x||_1$ on suppose $||x||_1 = \sum_n |x_n| \leq 1$, donc $|x_n| \leq 1$ d'où $|x_n|^p \leq |x_n|$ et en sommant $\sum_n |x_n|^p \leq \sum_n |x_n| < \infty$

3. Si $f \in \ell^1(\mathbb{Z}), g \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $p \in [1, +\infty]$, alors $f * g \in \ell^p(\mathbb{Z})$ et

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Comme en cours et TD pour $1/p + 1/q = 1$, on écrit $|f_{n-m} g_m| = |f_{n-m}|^{1/q} |f_{n-m}|^{1/p} |g_m|^{p/p}$. Or par le 1 $|f_{n-m}||g_m|^p$ est sommable car $|g|^p \in \ell^1$ donc $|f_{n-m}|^{1/p} |g_m|^{p/p}$ est dans ℓ^p à n fixé et $|f|^{1/q}$ est dans ℓ^q donc par Hölder et le 1.

$$|(f * g)_n| \leq \sum_m |f_{n-m} g_m| \leq |||f|^{1/q}||_q |(|f| * |g|^p)_n|^{1/p}$$

donc on obtient l'inégalité voulue en sommant et utilisant le 1 :

$$||f * g||_p^p = \sum_n |(f * g)_n|^p \leq ||f||_1^{p/q} ||f * |g|^p||_1 \leq ||f||_1^{p-1} ||f||_1 ||g||_p^p.$$

4. Vérifions que $T_f : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ définie par $T_f(g) = f * g$ est une application linéaire continue et montrer que sa norme subordonnée est :

$$|||T_f||| := \sup_{||g||_\infty \leq 1} ||f * g||_\infty = ||f||_1.$$

D'abord, par linéarité de la somme d'une série convergente T_f est linéaire et par Hólder $(f*g)_n \leq ||f||_1 ||g||_\infty$ d'où en passant au sup $||T_f(g)||_\infty \leq ||f||_1 ||g||_\infty$ et donc en passant au sup à nouveau $|||T_f||| \leq ||f||_1$ Posons $g_m = |f_{-m}|/f_{-m}$ si $f_m \neq 0$ et 0 sinon, on a $||g||_\infty = 1$ et $(f * g)_0 = ||f||_1$ donc $||f * g||_\infty \geq (f * g)_0 = ||f||_1$ et donc en comparant le sup à cette valeur :$|||T_f||| \geq ||f||_1$ vu $||g||_\infty \leq 1$

Exercice 3 (9 points+ Bonus : 1 point)

Soient $1 \leq p < \infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, Leb)$, On rappelle que $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$, $h \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$\omega_f(h) = ||\tau_h(f) - f||_p.$$

On définit finalement pour $0 < s \leq 1$, l'espace (de Besov)

$$B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}, Leb) : \sup_{|h|\neq 0} \frac{\omega_f(h)}{|h|^s} dh < \infty \right\}.$$

On rappelle que $C^1_b(\mathbb{R})$ est muni de la norme

$$||f||_{C^1_b} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$

On rappelle aussi (et on ne demande pas de remontrer) que si E, F sont des espaces de Banach, l'espace $E \oplus^1 F = (E \times F, ||.||_1)$ est l'espace de Banach de norme :

$$||(e, f)||_1 = ||e||_E + ||f||_F, e \in E, f \in F.$$

1. Montrons que l'application suivante $f \mapsto ||f||_{B^s_{p,\infty}}$ est une norme sur $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ définie par :

$$||f||_{p,s} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \right)^{1/p} + \sup_{|h|\neq 0} \frac{\omega_f(h)}{|h|^s}.$$

   C'est une conséquence du 2.

2. Soit l'ouvert $V = \{h \in \mathbb{R}, h \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. On munit l'ensemble de fonctions continues bornées $C^0_b(V, L^p(\mathbb{R}, Leb))$ de la norme sup $||f||_\infty = \sup_{h\in V} ||f(h)||_p$: Vérifions que

$$I : B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}, Leb) \oplus^1 C^0_b(V, L^p(\mathbb{R}, Leb)),$$

   définie par $I(f) = (f, g_f)$ est une isométrie, si on définit : $g_f(h) = \frac{\tau_h(f)-f}{|h|^s}$.
   On calcule en utilisant les définitions et l'homogénéité :

$$||I(f)|| = ||f||_p + ||g_f||_{C^0_b(V,L^p(\mathbb{R},Leb))} = ||f||_p + \sup_{|h|\neq 0} \left\| \frac{\tau_h(f) - f}{|h|^s} \right\| = ||f||_p + \frac{\omega_f(h)}{|h|^s} = ||f||_{p,s}.$$

   Ceci montre que I est bien définie. comme $f \mapsto g_f$ est linéaire comme τ_h, donc I linéaire.
   On déduit la réponse du 1., à savoir que $f \mapsto ||I(f)||$ est une semi-norme comme cpomposé d'application linéaire et d'une norme. Or si $||I(f)|| = 0$, on a $||f||_p = 0$ donc $f = 0$ d'où la séparation.
   Il reste que I linéaire et $||I(f)|| = ||f||_{p,s}$ donc c'est une isométrie.

3. Montrons que $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach. Comme il est isomporphe à $Im(I)$ il suffit de voir que c'est un un espace de Banach. Or Par le cours $L^p(\mathbb{R})$ est un Banach donc $C^0_b(V, L^p(\mathbb{R}, Leb))$ est un espace de Banach et par somme directe $\oplus^1$ donc $L^p(\mathbb{R}, Leb) \oplus^1 C^0_b(V, L^p(\mathbb{R}, Leb))$ est un espace de Banach et il suffit de voir que $Im(I)$ fermée.
   Soit $k_n = I(f_n) \in Im(I)$ avec $k_n \to k = (f, g)$ on a $f_n \to f$ dans L^p donc pour $h \neq 0$ $g_{f_n}(h) = \frac{\tau_h(f_n)-f_n}{|h|^s} \to \frac{\tau_h(f)-f}{|h|^s}$ in L^p et tend aussi vers $g(h)$ donc $g(h) = \frac{\tau_h(f)-f}{|h|^s} = g_f(h)$ donc $g = g_f$, $k = I(f) \in Im(I)$ ce qui conclut à $Im(I)$ fermé.

4. Montons que pour $s < t$, on a $B^t_{p,\infty}(\mathbb{R}) \subset B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$. Soit $f \in B^t_{p,\infty}(\mathbb{R})$. Si $|h| \leq 1$ $|h|^t \leq |h|^s$ donc $\frac{\omega_f(h)}{|h|^s} \leq \frac{\omega_f(h)}{|h|^t}$. Mais pour $|h| \leq 1$ $\frac{\omega_f(h)}{|h|^s} \leq \omega_f(h) \leq 2||f||_p$, donc :
$$\sup_{h\neq 0} \frac{\omega_f(h)}{|h|^s} \leq 2||f||_p + \sup_{h\neq 0} \frac{\omega_f(h)}{|h|^t} < \infty$$
Donc $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$.
5. Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une suite régularisante et $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$, montrons que la convolution $\rho_n * f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R})$ et qu'on a :
$$||\rho_n * f||_{p,s} \leq ||f||_{p,s}.$$
D'abord, on note que d'après le cours $||\rho_n * f||_p \leq ||\rho_n||_1||f||_p = ||f||_p$.
De plus $\tau_h(\rho * f)(x) = \int \rho(y)f(x+h-y) = \rho * \tau_h(f)$ donc $g_{\rho_n * f}(h) = \rho_n * g_f(h)$.
Donc $||g_{\rho_n * f}(h)||_p \leq ||g_f(h)||_p$ donc en prenant le sup sur h et la somme $||I(\rho_n * f)|| \leq ||I(f)||$ ce qui conclut comme I isométrique.
6. On considère le cas $s = 1$. Montrons que
$$||(\rho_n * f)'||_p \leq ||f||_{p,1}.$$
Or $(\rho_n * f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ par le cours comme $f \in L^p$ donc
$$\int dt |\frac{(\rho_n * f)(t+h) - (\rho_n * f)(t)}{h}|^p = \frac{||\tau_h(\rho_n * f) - \rho_n * f||_p^p}{h^p} = ||g_{\rho_n * f}(h)||_p^p \leq ||f||_{p,1}^p$$
par le 5. De plus pour tout t, l'intégrand converge vers $(\rho_n * f)'(t)$ pour $h \to 0$, il reste à obtenir une domination pour $|h| \leq 1$:
$$|\frac{(\rho_n * f)(t+h) - (\rho_n * f)(t)}{h}| \leq \int_{[t-1,t+1]} |(\rho_n' * f)(s)| ds \leq 2||\rho_n'||_q||f||_p$$
par le théorème fondamental du calcul et le calcul de la dérivée du produit de convolution en cours. On domine donc par une fonction ccontante pour obtenir
$$\int_{-M}^{M} dt|(\rho_n * f)'(t)|^p = \lim_{h\to 0} \int_{-M}^{M} dt |\frac{(\rho_n * f)(t+h) - (\rho_n * f)(t)}{h}|^p \leq ||f||_{p,1}^p$$
enfin par convergence monotone $M \to \infty$:
$$||(\rho_n * f)'||_p \leq ||f||_{p,1}.$$
7. Soit $f \in B^1_{p,\infty}(\mathbb{R}), p > 1$. Montrons que si $1/p + 1/q = 1$, alors il existe un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle telle que :
$$\forall x \notin A, \forall y \notin A, |f(x) - f(y)| \leq ||f||_{p,1}|x-y|^{1/q}.$$
On applique le théorème fondamental du calcul et Hölder :$|\rho_n * f(x) - \rho_n * f(y)| \leq \int_{[y,x]} |(\rho_n * f)'(t)| \leq ||(\rho_n * f)'||_p|y-x|^{1/q}$
donc par l'inégalité précédente du 6,
$$|\rho_n * f(x) - \rho_n * f(y)| \leq ||f||_{p,1}|y-x|^{1/q}.$$
Or par le cours $\rho_n * f \to f$ dans L^p donc quitte à extraire p.p. donc sur A^c voulue. En passant à la limite sur A^c on obtient le résultat.

8. **(Bonus 1 point)** Avec le f de la question précédente, déduisons qu'il existe $g \in B^1_{p,\infty}(\mathbb{R})$ $1/q$-Hölder continue tel que $f = g$ presque partout. (Indication, montrer puis utiliser que A^c est dense dans $\mathbb{R}$).

   En effet si A^c n'était pas dense soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin \overline{A^c} = Int(A)^c$ donc $x \in Int(A)$ il existe donc une boule $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset A, \epsilon > 0$ ce qui contredit $Leb(A) = 0$ On pose $g = f$ sur A^c. Par densité et uniforme continuité elle se prolonge en g $1/q$-Hölder continue sur $\mathbb{R}$. comme $f = g$ p.p $||f||_p = ||g||_p$ et $||\tau_h f - f||_p = ||\tau_h g - g||_p$ d'où $g \in B^1_{p,\infty}(\mathbb{R})$.