Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2017-2018

Contrôle continu
Lundi 16 octobre 2017

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de **justifier soigneusement** les réponses aux exercices.

Exercice 1 (3 points, Exercice de cours) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que la convolution $f * g$ existe, on ne demande pas de le redémontrer.

1. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert sur lequel $f = 0$ presque partout. On note $Supp(f)$ son complémentaire.
2. Montrer que
$$Supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + Supp(g)}.$$
3. Si f est en plus continue à support compact, montrer que la convolution $f * g$ est continue.

Exercice 2 (8 points) On fixe $1 \leq p < q < \infty$ et Leb la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

1. Rappeler pourquoi $L^q(]0,1[, Leb) \subset L^p(]0,1[, Leb)$?
2. Rappeler pourquoi $L^q(]0,1[, Leb) \subset L^p(]0,1[, Leb)$ est dense.
Montrer qu'il contient un ensemble dénombrable dense.
3. Montrer que la boule unité fermée B_q de $L^q(]0,1[, Leb)$ est fermée dans $L^p(]0,1[, Leb)$.
4. Montrer que $L^q(]0,1[, Leb)$ est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide de $L^p(]0,1[, Leb)$.
5. Est-ce que $L^q(]0,1[, Leb)$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $L^p(]0,1[, Leb)$? (justifier)

Exercice 3 (9 points)

Soit $1 \leq p < \infty$. On définit les espaces $P_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions 2π-périodiques :

$$L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb) = \{f \in P_{2\pi}(\mathbb{R}) : f|_{[0,2\pi]} \in L^p([0, 2\pi], Leb)\}.$$

(plus précisément l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions ne différant que sur un ensemble de mesure nulle et ayant un représentant 2π-périodique) muni de la norme de $L^p_{2\pi}([0, 2\pi], Leb)$.

On pose aussi :

$$C^0_{2\pi}(\mathbb{R}) = C^0_b(\mathbb{R}) \cap P_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad C^1_{2\pi}(\mathbb{R}) = C^1_b(\mathbb{R}) \cap P_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

On munit $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ de la norme
$$||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$
et $C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ de la norme :
$$||f||_{C^1} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + |f'(x)|.$$

On rappelle que $c_0(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites convergeant vers 0 muni de la norme uniforme, et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées.

1. Montrer que $C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ est une algèbre vérifiant
$$||fg||_{C^1} \leq ||f||_{C^1}||g||_{C^1}.$$
2. Rappeler pourquoi $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ est un espace de Banach.
3. Montrer que $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}), C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach.
4. Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$. On pose
$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{itn} f(t)dt.$$
Montrer que $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application (bien définie) linéaire et continue de $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ à valeur dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Calculer la norme subordonnée $|||\mathcal{F}|||$.
5. Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$, on définit une application linéaire continue $T_f : L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb) \to L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ par (l'intégrale définie presque partout) :
$$T_f(g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy.$$
6. Montrer pour $f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$, que $\mathcal{F}(T_f(g)) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
7. Montrer que $C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ est dense dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass ou la convolution T_f). Est-il dense dans $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$?
8. Montrer que $\mathcal{F}$ est à valeur dans $c_0(\mathbb{N})$.