Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2017-2018

Correction du Contrôle continu 1
Lundi 16 octobre 2017

Exercice 1 (3 points, Exercice de cours) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que la convolution $f * g$ existe, on ne demande pas de le redémontrer.

(cf cours pour le détail, on explique juste quelques erreurs à éviter).

1. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert sur lequel $f = 0$ presque partout. On note $Supp(f)$ son complémentaire. Pour cette question il faut poser l'ensemble $(U_i)_{i\in I}$ de **tous** les ouverts sur lesquels $f|_{U_i} = 0$ pp et posons $\Omega = \cup_{i\in I} U_i$. Reste à montrer que $f|_\Omega = 0$ pp et c'est là qu'il faut montrer que l'on peut recouvrir Ω par une union dénombrable d'ouverts sur lesquels $f = 0$ pp.
2. Montrer que
$$Supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + Supp(g)}.$$
3. Si g est en plus continue, montrer que la convolution $f * g$ est continue. Ici le plus simple consistait à utiliser la continuité de l'intégrant et de dominer.

Exercice 2 (8 points) On fixe $1 \le p < q < \infty$ et Leb la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

1. Rappelons pourquoi $L^q(]0, 1[, Leb) \subset L^p(]0, 1[, Leb)$?
En effet par l'inégalité de Holder appliqué à $1 \in L^r(]0, 1[, Leb)$ avec $1/p = 1/r + 1/q$ ce qui est possible pour $r > 1$ vu $0 < 1/r = 1/p - 1/q < 1/p \le 1$. on obtient :
$$||f||_p = ||f1||_p \le ||f||_q ||1||_r < \infty$$
si $f \in L^q(]0, 1[, Leb)$ d'où l'inclusion.
2. Rappelons pourquoi $L^q(]0, 1[, Leb) \subset L^p(]0, 1[, Leb)$ est dense.
En effet, les fonctions étagées sont, par construction de l'intégrale, denses dans $L^p(]0, 1[, Leb), p < \infty$ et contenues dans $L^\infty(]0, 1[, Leb) \subset L^q(]0, 1[, Leb)$, d'où la densité.
Montrons qu'il contient un ensemble dénombrable dense. EN effet, on a vu en cours que $C^0([0, 1])$ et dense dans $L^p(]0, 1[, Leb)$. Or par le théorème d'approximation de Weierstrass, les polynômes sont denses dans $C^0([0, 1])$ (dont la norme est plus forte) donc aussi dans $L^p(]0, 1[, Leb)$. Enfin, les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ sont en nombres dénombrables et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ approchent tous les polynômes, d'où le résultat, l'ensemble dénombrable des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est dense dans $L^p(]0, 1[, Leb)$.
3. Montrons que la boule unité fermé B_q de $L^q(]0, 1[, Leb)$ est fermé dans $L^p(]0, 1[, Leb)$.
Méthode 1 : Soit $||x_n||_q \le 1$ et soit $x \in L^p(]0, 1[, Leb)$ tel que $||x_n - x||_p \to 0$. Par le cours on peut extraire une sous-suite x_{k_n} qui converge presque partout vers x. Or par Fatou :
$$\int |x|^q \le \liminf \int |x_n|^q \le 1$$
d'où le résultat.

Méthode 2 : On utilise la formule du cours pour la norme qui se réécrit (vu $L^\infty \subset L^r \subset L^1$)

$$||x_n||_q = \sup\{\left|\int fx_n\right| f \in L^\infty(]0,1|, Leb), ||f||_r \leq 1\}$$

avec r tel que $1/q + 1/r = 1$. On va utiliser l'idée qu'un sup de fonctions continues est semicontinues inférieurement. On a $\left|\int fx_n\right| \to \left|\int fx\right|$ vu la borne de la différence par $||x_n - x||_p ||f||_\infty$. Or par Holder : $\| \int fx_n\| \leq ||f||_r ||x_n||_q$ donc à la limite $\int \| \int fx\| \leq 1$ et en passant au sup : $||x||_q \leq 1$.

4. Montrons que $L^q(]0,1[, Leb)$ est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide de $L^p(]0,1[, Leb)$. Soit x_n une suite dense de L^q par le 2. On a l'union dénombrable :

$$L^q(]0,1[, Leb) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n + B_q.$$

Les $x_n + B_q$ sont des fermés de L^p par le 3, il reste à voir qu'ils sont d'intérieurs vides. Or soit $f \in L^p - L^q$ $B_q^c \supset f + L^q$ qui est dense dans L^p vu la densité de L^q donc comme B_q^c dense, on déduit que B_q est d'intérieur vide.

5. Voyons que $L^q(]0,1[, Leb)$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts de $L^p(]0,1[, Leb)$? Par l'absurde, comme L^q est dense, si c'était le cas, ce serait une intersection dénombrable d'ouverts denses $\cap_{m\in\mathbb{N}} O_m$. Alors en utilisant la question précédente :

$$L^p(]0,1[, Leb) = L^q(]0,1[, Leb) \cup \cup_{m\in\mathbb{N}} O_m^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (x_n + B_q) \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m^c$$

serait une union dénombrable de fermés d'intérieurs vide, or par le cours il est complet, donc par le Théorème de Baire, il serait d'intérieur vide dans lui-même, ce qui est absurde (il est ouvert !)

Remarque : on montre de la même façon que $\mathbb{Q}$ (qui est bien union dénombrable de fermés d'intérieur vide) ne peut pas être intersection d'ouverts partout denses.

Exercice 3 (9 points)

Soit $1 \leq p < \infty$. On définit les espaces $P_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions 2π-périodiques :

$$L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb) = \{f \in P_{2\pi}(\mathbb{R}) : f|_{[0,2\pi]} \in L^p([0,2\pi], Leb)\}.$$

(plus précisément l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions ayant un représentant 2π-périodique) muni de la norme de $L^p_{2\pi}([0,2\pi], Leb)$.

On pose aussi :

$$C^0_{2\pi}(\mathbb{R}) = C^0_b(\mathbb{R}) \cap P_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad C^1_{2\pi}(\mathbb{R}) = C^1_b(\mathbb{R}) \cap P_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

On munit $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

et $C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ de la norme :

$$||f||_{C^1} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + |f'(x)|.$$

On rappelle que $c_0(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites convergeant vers 0 muni de la norme uniforme, et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées.

1. Montrons que $C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ est une algèbre vérifiant

$$||fg||_{C^1} \leq ||f||_{C^1}||g||_{C^1}.$$

La 2π périodicité et la continuité sont stables par produit comme la dérivabilité. De plus, on a la règle de Leibniz : $(fg)' = f'g + fg'$ d'où :

$$\begin{aligned} |(fg)(x)| + |(fg)'(x)| &\leq |f(x)||g(x)| + |f'(x)||g(x)| + |f(x)||g'(x)| \leq (|f(x)| + |f'(x)|)(|g(x)| + |g'(x)|) \\ &\leq ||f||_{C^1}||g||_{C^1} \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité en passant au sup.

2. $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ est un espace de Banach car il est par définition isométrique à $L^p([0, 2\pi], Leb)$

3. Montrons que $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}), C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach. Notons que $C^k_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in C^k_b(\mathbb{R}) : f(x + 2\pi) - f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}\}$. Or par le cours $C^k_b(\mathbb{R})$ est un espace de Banach, il suffit donc de voir qu'il s'agit d'un sous-espace fermé. Or la formule se réécrit comme l'intersection

$$C^k_{2\pi}(\mathbb{R}) = \cap_{x\in\mathbb{R}} Ker(ev_{x+2\pi} - ev_x)$$

où $ev_x(f) = f(x)$ est linéaire et continue car $|ev_x(f)| \leq ||f||_\infty \leq ||f||_{C^1}$ (et donc bornée sur les boules unités). Donc $C^k_{2\pi}(\mathbb{R})$ est fermé comme intersection des fermés $Ker(ev_{x+2\pi} - ev_x)$ qui sont fermés comme noyau d'une forme linéaire continue.

4. Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$. On pose

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{itn} f(t)dt.$$

Montrons que $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application (bien définie) linéaire et continue de $L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ à valeur dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Vu que f est intégrable, c'est aussi le cas de $e^{itn}f(t)$ dominé par f. donc $\mathcal{F}$ est bien défini et $|\hat{f}(n)| \leq ||f||_1$ donc $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. De plus on a $||\mathcal{F}(f)||_\infty \leq ||f||_1$. Enfin, par linéarité de l'intégrale, $\mathcal{F}$ est linéaire, et on vient de voir qu'elle bornée sur la boule unité, donc elle est continue et $|||\mathcal{F}||| \leq 1$. Si on prend, $f(t) = 1$ on obtient $\hat{f}(0) = 2\pi$, $|\hat{f}(n)| \leq 2\pi$, donc $||\mathcal{F}(f)||_\infty = 2\pi = ||f||_1$ donc $|||\mathcal{F}||| = 1$.

5. Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$. Montrons que pour tout $p \in [1, \infty[$, on définit une application linéaire continue $T_f : L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb) \to L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ par :

$$T_f(g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x - y)g(y)dy.$$

On suit la définition de la convolution du cours. On commence par $p = 1$, par Fubini Tonelli puis changement de variable affine et enfin 2π-périodicité :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} |f(x - y)g(y)|dy &= \int_0^{2\pi} dy|g(y)| \int_0^{2\pi} |f(x - y)|dx = \int_0^{2\pi} dy|g(y)| \int_{-y}^{2\pi-y} |f(t)|dt \\ &= \int_0^{2\pi} dy|g(y)|||f||_1 = ||f||_1||g||_1 \end{aligned}$$

Donc pour pp tout x l'intégrale définissant $T_f(g)$ est bien définie et $||T_f(g)||_1 \leq ||f||_1||g||_1$ donc comme par linéarité de l'intégrale T_f est linéaire en g, on trouve T_f linéaire continue sur L^1 (car borné sur la boule unité). Pour voir que T_f a le bon espace de valeur il faut vérifier la périodicité mais par périodicité de f c'est évident :

$$T_f(g)(x+2\pi) = \int_0^{2\pi} f(x+2\pi-y)g(y)dy = T_f(g)(x).$$

Ensuite, on regarde $T_{|f|}(|g|^p) \in L^1$ pour $g \in L^p$, et on déduit $||T_{|f|}(|g|^p)||_1 \leq ||f||_1||g||_p^p$. Donc $|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p([0,2\pi]^2)$ Or $|f(x-y)|^{1/q} \in L^q([0,2\pi],dx)$, donc par Holder :

$$\begin{aligned}|T_f(g)(x)| &\leq \int_0^{2\pi} dy|f(x-y)|^{1/q}||f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \\ &\leq ||f||_1^{1/q}(\int_0^{2\pi} |f(x-y)||g(y)|^p)^{1/p} = ||f||_1^{1/q}(T_{|f|}(|g|^p)(x))^{1/p}\end{aligned}$$

En prenant la norme L^p, puis utilisant le cas L^1 on obtient :

$$\begin{aligned}||T_f(g)||_p &\leq ||f||_1^{1/q}||T_{|f|}(|g|^p)||_1^{1/p} \\ &\leq ||f||_1^{1/q}||f||_1^{1/p}||g||_p\end{aligned}$$

ce qui donne T_f bien définie et par linéarité de l'intégrale T_f linéaire , et bornée sur la boule unité donc continue.

6. Montrons que $\mathcal{F}(T_f(g)) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$. Comme on a déjà vérifié l'intégrabilité, on peut écrire puis appliquer Fubini (et enfin la 2π périodicité) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_f(g))(n) &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} e^{i[(x-y)+y]n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_0^{2\pi} dyg(y)e^{iyn} \int_0^{2\pi} e^{i[(x-y)]n} f(x-y)dx = \int_0^{2\pi} dyg(y)e^{iyn}\mathcal{F}(f)(n) = \mathcal{F}(f)(n)\mathcal{F}(g)(n)\end{aligned}$$

7. Montonsr que $C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ est dense dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass ou la convolution T_f) et aussi dense dans $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$. ?
Pour la deuxième question, il suffit d'identifier $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ à $C^0(T)$ avec $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ par $I(f)(e^{it}) = f(t)$ et de même $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, Leb)$ à $L^p(T, Leb)$. $I(f)$ est par changement de variable une isométrie et on peut alors utiliser le cours pour dire que $C^0(T)$ est dense dans $L^p(T, Leb)$ (vu T compact donc localement compact), d'où la réponse à la deuxième question est oui.
Pour la première question, on a :
Méthode 1 : On applique le théorème d'approximation de Weierstrass au compact T de $\mathbb{R}^2$ en voyant comme avant $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}) = I^{-1}(C^0(T))$. On obtient une suite P_n de polynômes, disons avec $||I(f) - P_n||_\infty \leq 1/n$ on pose $g_n(t) = P_n(e^{it})$ de sorte que par isométrie $||f - g_n||_\infty = ||I(f) - I(g_n)||_\infty = ||I(f) - P_n||_\infty \leq 1/n$. Or il est facile de voir que g_n est C^1 par composition. (On a même en fait prouvé le théorème de Weierstrass trigonométrique...)
Méthode 2 : On prend ρ_n une suite régularisante sur $\mathbb{R}$ que l'on pose sur $]-\pi, \pi[$ et qu'on étend par 2π périodicité en $\overline{\rho}_n$. Alors par changement de variable et périodicité (n'importe quelle intégrale sur un segment de longueur la période a même valeur) :

$$T_{\overline{\rho}_n}(g)(x) = -\int_x^{x-2\pi} \overline{\rho}_n(z)g(x-z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\rho}_n(y)g(x-y)dy = \rho_n * g(x)$$

on retrouve la convolution sur $\mathbb{R}$! Comme en TD, si $\epsilon > 0$ et $\eta = 2/n$ coefficient d'uniforme continuité de g pour ϵ : on a

$$|\rho_n * g(x) - g(x)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y)|g(x-y) - g(x)|dy \leq \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y)\epsilon = \epsilon \to 0$$

d'où la convergence uniforme et le cours donne que $\rho_n * g$ est lisse sur $\mathbb{R}$. Elle est $2pi$ périodique vu l'égalité à $T_{\overline{\rho}_n}(g)(x)$. Donc $T_{\overline{\rho}_n}(g) \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ et converge uniformément vers g, d'où la densité.

8. Montrons que $\mathcal{F}$ est à valeur dans $c_0(\mathbb{N})$. Soit $n > 0$, on prend $g \in C^1$ tel que $||f - g_n||_\infty \leq 1/n$ d'où par contractivité $||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(g)||_\infty \leq ||f - g_n||_1 \leq 2\pi/n$. Or par Intégration par partie :

$$\mathcal{F}(g_n')(m) = [e^{itm}g_n(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} ime^{itm}g_n(t)dt = -im\mathcal{F}(g_n)(m)$$

d'où $|\mathcal{F}(g_n)(m)| \leq ||g_n'||_1/m \to 0$ et donc

$$\limsup_{m\to\infty} |\mathcal{F}(f)(m)| \leq \limsup_{m\to\infty} 2\pi/n + ||g_n'||_1/m = 2\pi/n \to_{n\to\infty} 0$$

ce qui conclut.