Université Claude Bernard — Mathématiques
M1G Analyse — 2015-2016

Contrôle continu
Lundi 9 novembre 2015

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (5 points)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. (on ne suppose PAS que E est complet)
Soit $C \subset E$ un fermé.

1. Soit $x, y \in C$. On pose $x_0 = x, y_0 = y$ et par récurrence
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4}, \quad y_{n+1} = \frac{3x_n + y_n}{4}.$$
Montrer que x_n converge et trouver sa limite.
2. On suppose que pour tout $x, y \in C$ on a
$$\frac{x+3y}{4} \in C.$$
(On suppose toujours que C est fermé). Montrer que C est convexe.
3. On suppose maintenant à la place qu'il existe $t \in]0, 1/2[$ tel que, pour tout $x, y \in C$ on a
$$tx + (1-t)y \in C.$$
(On suppose toujours que C est fermé). Montrer que C est convexe.

Exercice 2 (5 points)

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose $f, g : E \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$$f(x,y) = (x+y)^4 + (x-y)^4,$$
$$g(x,y) = (x+y)^4 + (x-y)^4 + 2x + y.$$
$$A = [-1,1]^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}.$$

1. On rappelle que $F : E \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si pour tout $u \neq v \in E, t \in]0,1[$,
$$F(tu + (1-t)v) < tF(u) + (1-t)F(v).$$
Soit $A : E \to E$ linéaire inversible. Montrer que F est strictement convexe si et seulement si $F \circ A$ est strictement convexe.
2. Montrer que f est strictement convexe.
3. En déduire que g est strictement convexe.
4. Montrer que g admet un unique minimum sur A.
5. Trouver le point atteignant le minimum de g sur A.

Exercice 3 (9 points)

Soit E un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$). Soient des formes linéaires continues $f_1, ..., f_n \in E'$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ fixés. On cherche à montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$ avec $||x_\epsilon|| \leq 1$ et tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$|f_i(x_\epsilon) - \lambda_i| < \epsilon.$$

(ii) On a l'inégalité suivante pour tout $(y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$, :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \right\|_{E'}$$

1. Énoncer le théorème de séparation de Hahn-Banach (que l'on va utiliser).
2. Vérifier que (i) implique (ii).
3. On considère $f = (f_1, ..., f_n) \in L(E, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
   Soit $B = \{x \in E,\ ||x|| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E.
   On suppose que (i) n'est pas vérifiée.
   Appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à $\{\lambda\}$, et $\overline{f(B)}$.
4. Conclure.

Exercice 4 (1 point + Bonus : 5 points)

Soit $E = c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0, muni de la norme sup $||.||_\infty$, et e_i la suite dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Soit

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i \ : \ \epsilon_i \in \{-1, 1\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soit enfin $B = \{x \in E, ||x||_\infty \leq 1\}$.

1. Montrez que l'enveloppe convexe $Conv(A) \subset B$.
2. **(Bonus : 5 points)** Montrez que l'enveloppe convexe fermée de A est

$$\overline{Conv(A)} = B.$$