Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2015-2016

Correction du Contrôle continu

Exercice 1 (5 points)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $C \subset E$ un fermé.

1. Soit $x, y \in C$. On pose $x_0 = x, y_0 = y$ et par récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4}, \quad y_{n+1} = \frac{3x_n + y_n}{4}.$$

On applique juste une matrice 2×2 à (x_n, y_n), si on calcule les vecteurs propers, on voit l'intérêt de calculer la somme et la différence. $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n = x + y$ est constante et

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{4} - \frac{3x_n + y_n}{4} = -\frac{x_n - y_n}{2}$$

Donc par récurrence simple $||x_n - y_n|| = \frac{||x-y||}{2^n} \to 0$ donc en revenant à la base de départ : $x_n = \frac{x_n - y_n}{2} + \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{x_n - y_n}{2} + \frac{x+y}{2} \to \frac{x+y}{2}$

2. On suppose que pour tout $x, y \in C$ on a $x_1 = \frac{x+3y}{4} \in C$. Par symétrie $y_1 \in C$ et par récurrence simple $x_n, y_n \in C$ pour tout n. Donc comme C fermé, la limite aussi $\frac{x+y}{2} \in C$, pour tout $x, y \in C$. Il reste à conclure comme en TD On montre par rec. sur n que

$$x_{k,n} = \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in C, \forall k \in [\![0, 2^n]\!],$$

$x_{0,0} = y, x_{1,0} = y$ sont dans C d'où le rang $n = 0$. Puis

$$\forall k \in [\![0, 2^{n-1}]\!] x_{2k,n} = x_{k,n-1}, x_{2k+1,n} = \frac{x_{k,n-1} + x_{k+1,n-1}}{2} \in C$$

par l'hyp. de rec. et la stabilité par milieu de C. Ceci donne l'étape d'induction. Or pour $t \in [0, 1] t_n = \lfloor 2^n t \rfloor$ est un k de la forme précédente donc $\frac{t_n x + (2^n - t_n)y}{2^n} \in C$, et comme C est fermé la limite $tx + (1-t)y \in C$ comme $x, y \in C, t \in [0, 1]$ sont arbitraires, C est convexe.

3. On suppose qu'il existe $t \in]0, 1/2[$ tel que pour tout $x, y \in C$ on a $x_1 = tx + (1-t)y \in C$, donc $y_1 = ty + (1-t)x \in C$, puis par rec :

$$x_{n+1} = tx_n + (1-t)y_n \in C, \quad y_{n+1} = ty_n + (1-t)x_n \in C.$$

Comme au 1, $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n = x + y$ est constante et $||x_{n+1} - y_{n+1}|| = (1-2t)||x_n - y_n|| = (1-2t)^n ||x - y|| \to 0$ car $0 < 1 - 2t < 1$ donc comme C fermé, la limite de $x_n = \frac{x_n - y_n}{2} + \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{x_n - y_n}{2} + \frac{x+y}{2} \to \frac{x+y}{2} \in C$. On conclut alors comme au 2 (et comme en TD).

Exercice 2 (5 points)

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose $f, g : E \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x, y) = (x + y)^4 + (x - y)^4,$$

$$g(x, y) = (x + y)^4 + (x - y)^4 + 2x + y.$$

$$A = [-1, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}.$$

1. On rappelle que $F : E \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si pour tout $u \neq v \in E, t \in]0,1[$,

$$F(tu + (1-t)v) < tF(u) + (1-t)F(v).$$

Soit $B : E \to E$ linéaire inversible. Si F est strictement convexe alors si $u \neq v \in E, t \in]0,1[$, par linéarité de B puis convexité stricte de F :

$$F \circ B(tu + (1-t)v) = F(tB(u) + (1-t)B(v)) < tF(B(u)) + (1-t)F(B(v))$$

CAR $B(u) \neq B(v) \in E$ par injectivité de B donc $F \circ B$ est strictement convexe.
Réciproquement $F = G \circ B^{-1}$, $G = F \circ B$ est strictement convexe et B^{-1} linéaire inversible donc le premier sens implique que F est strictement convexe.

2. Soit $F(x,y) = x^4 + y^4 = G(G(x)) + G(G(y))$ est strictement convexe comme somme de fonctions strictement convexes. En effet $G(x) = x^2$ est strictement convexe (identité du parallélogramme ou cf TD) et donc $u \neq v \in \mathbb{R}, t \in]0,1[$,

$$G(G(tu + (1-t)v)) < G(tG(u) + (1-t)G(v)) \leq tG(G(u)) + (1-t)G(G(v)),$$

la première inégalité vient de la croissance stricte de G sur $\mathbb{R}^+$ appliquée à l'inégalité de convexité stricte de G et la seconde par convexité de G. Donc $G \circ G$ est bien strictement convexe et $f = F \circ A$ avec $A(x,y) = (x+y, x-y)$ est linéaire inversible (determinant $-2 \neq 0$) donc par le 1 f est strictement convexe.

3. $h(x,y) = 2x + y$ est linéaire donc convexe (PAS strictement) et f est strictement convexe donc la somme $g = f + h$ est strictement convexe.

4. g est polynomiale donc continue sur le fermé borné A (en dimension finie 2) donc compact, donc g est borné et atteint ses bornes en particulier son minimum. Comme g est strictement convexe (sur E donc A) celui ci est unique (cf cours), g admet donc un unique minimum sur A.

5. Pour trouver le minimum de g sur A on cherche d'abord des points critiques (comme g est C^1) dans $Int(A)$ on a les equations $4(x+y)^3 + 4(x-y)^3 = -2, 4(x+y)^3 - 4(x-y)^3 = -1$ donc $x + y = -\sqrt[3]{3}/2, x - y = -1/2$ soit $x = -\sqrt[3]{3}/4 - 1/4 \in]-1,1[, y = -\sqrt[3]{3}/4 + 1/4 \in]-1,1[$, Le point critique est dans $Int(A) =]-1,1[^2$ donc comme g convexe c'est un minimum de g sur A, par unicité du 4 il n'y en a pas d'autres.

Exercice 3 (9 points)

Soit E un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$). $f_1, ...f_n \in E'$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ fixés. On cherche à montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$ avec $||x_\epsilon|| \leq 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$|f_i(x_\epsilon) - \lambda_i| < \epsilon.$$

(ii) On a l'inégalité suivante pour tout $(y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$, :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \right\|_{E'}$$

1. cf cours

2. Vérifions que (i) implique (ii). On fixe x_ϵ par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - f_i(x_\epsilon)+f_i(x_\epsilon))y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i - f_i(x_\epsilon)|\,|y_i| + \left|\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(x_\epsilon)\right| \leq \epsilon\sum_{i=1}^{n}|y_i| + \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i f_i\right\|_{E'}$$

Comme l'inégalité $|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} y_i f_i\|_{E'} + \epsilon\sum_{i=1}^{n}|y_i|$ ne contient pas de points dépendants de ϵ on passe à la limite $\epsilon \to 0$ pour obtenir (ii).

3. On considère $f = (f_1, ..., f_n) \in L(E, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Comme $B = \{x \in E | ||x|| \leq 1\}$ est une boule donc convexe, f linéaire, $f(B)$ est convexe donc s(par cours) on adhérence $\overline{f(B)}$ est convexe et fermé. (il est aussi non vide car contient $0 = f(0)$.

   On suppose que (i) n'est pas vérifiée donc il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B$ il existe i : $|f_i(x) - \lambda_i| \geq \epsilon$.

   Pour appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach au convexe compact $\{\lambda\}$, et au convexe fermé non-vide $\overline{f(B)}$, il suffit de voir qu'ils ont disjoints. Or, si $\lambda \in \overline{f(B)}$ par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe $x_n \in B$ $f(x_n) \to \lambda$ ce qui contredit $|f_i(x_n) - \lambda_i| \geq \epsilon$. Donc la contradiction donne $\{\lambda\}$ et $\overline{f(B)}$ sont disjoints.

   Le théorème de séparation de Hahn-banach donne donc $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \simeq (\mathbb{R}^n)', c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in B,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i < c < \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)$$

   On peut même remplacer $f_i(x)$ par $y_i \in \overline{f(B)}$ mais on en aura pas besoin.

4. Comme $-x \in B$ si $x \in B$ on obtient

$$\forall x \in B,\ -|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i < c < -|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)|$$

   en passant à l'inf sur $x \in B$ (ce qui revient au sup si on avait pas le moins) :

$$-|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i| < c \leq -\sup_{x\in B}|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)| = -\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\|_{E'}$$

   (avec la def de la norme duale) en prenant $-$ on obtient $\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\|_{E'} < |\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i|$ ce qui contredit (ii). Donc par contraposée (ii) implique (i).

Exercice 4 (1 point +Bonus : 5 points)

Soit $E = c_0(\mathbb{N})$ muni de la norme sup $||.||_\infty$, l'ensemble des suites convergeant vers 0 et e_i la suite dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Soit

$$A = \{x = \sum_{i=0}^{n}\epsilon_i e_i, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

.

Soit enfin $B = \{x \in E, ||x||_\infty \leq 1\}$.

Montrons que l'enveloppe convexe fermé de A est

$$\overline{Conv(A)} = B.$$

1. Comme B est convexe, il suffit de voir $A \subset B$ pour obtenir $Conv(A) \subset B$. Mais $|| \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i||_\infty = \sup_i |\epsilon_i| \leq 1$ donc tout $x = \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i \in A$ est bien dans la boule B.
2. Comme B est fermé, on déduit en passant à l'adhérence $\overline{Conv(A)} \subset \overline{B} = B$. Pour la réciproque, voici 2 méthodes :

- On suppose par l'absurde $x \in B$ et $x \notin \overline{Conv(A)}$. Comme $\overline{Conv(A)}$ est un convexe fermé, on le sépare du convexe compacte $\{x\}$ supposé (par l'absurde disjoint) et on obtient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E' \simeq \ell^1(\mathbb{N})$ avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n > c > \sum_{n=0}^{\infty} u_n y_n, y \in \overline{Conv(A)}$$

En prenant le sup sur $y \in A$ on a le cas $y_n = signe(u_n)$ pour $n \leq N$ (0 ensuite) donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n y_n = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \geq |\sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n| > c \geq \sum_{n=0}^{N} |u_n| \to_{N \to \infty} ||u||_{\ell^1}$$

l'inégalité stricte $||u||_{\ell^1} > c \geq ||u||_{\ell^1}$ donne la contradiction cherchée et donc $\overline{Conv(A)} = B$.

- Autre méthode concrète : On montre que

$$C := \cup_{k \leq n \in \mathbb{N}} \{x = \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i, \epsilon_i \in \{-1, 1\} n \geq i > k, \epsilon_i \in [-1, 1] i \leq k\} \subset Conv(A)$$

Pour n donné, on montre par récurrence que le nombre k dans la forme générale d'un élément de C parmi les ϵ_i, si $k = 0$, $\sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i \in A$, et si on sait le résultat jusqu'au rang k et que $\sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i$ avec $\epsilon_k = (-1)\frac{1-\epsilon_k}{2} + \frac{\epsilon_k+1}{2} \in [-1, 1]$ est une combinaison convexe de sorte que ,

$$\sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i = \frac{1 - \epsilon_k}{2} (\sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i + (-1 - \epsilon_k) e_k) + \frac{\epsilon_k + 1}{2} (\sum_{i=0}^{n} \epsilon_i e_i + (1 - \epsilon_k) e_k)$$

et les deux termes dont on prend la combinaison convexe ont un terme différent de ± 1 de moins et sont dans $Conv(A)$ par l'hyp de rec. Donc on a $C \subset Conv(A)$. $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k e_k$ De sorte que $||X_n - x|| = \sup_{k \geq n} |x_k| \to 0$ car $x \in c_0(\mathbb{N})$ donc il suffit de noter $X_n \in C \subset COnv(A)$ pour montrer que $COnv(A)$ dense dans B.