Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2016-2017

Contrôle continu
Lundi 14 novembre 2016

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

On munit toujours un dual E' de E de sa norme (d'opérateur) usuelle que l'on note $||.||_{E'}$.

Exercice 1 (5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f, g, h des formes linéaires sur E. On veut montrer l'équivalence entre :

(i) $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda g + \mu h$;

(ii) $\exists M \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$: $|f(x)| \leq M(|g(x)| + |h(x)|)$.

1. Montrer que (i) implique (ii).
2. Énoncer le théorème de séparation de Hahn-Banach aussi dit théorème de Hahn-Banach géométrique avec les deux versions (pas seulement celle que l'on va utiliser).
3. Rappeler pourquoi $K_1 = \{(f(x), g(x), h(x)), x \in E\} \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
4. On suppose (ii). Appliquer le théorème de Hahn-Banach géométrique à K_1 et $\{(1, 0, 0)\}$.
5. Montrer que (ii) implique (i).

Exercice 2 (7 points)

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$) et $G \subset E$ un sous espace vectoriel. Soit l'espace vectoriel $F = E \times \mathbb{R}$ muni de la norme $||(x, y)||_F = \max(||x||_E, |y|)$.

On considère $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire continue et $p : E \to [0, +\infty[$ continue vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \lambda \geq 0, \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

On suppose que pour tout $y \in G$,

$$g(y) \leq p(y).$$

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de prolongement de Hahn-Banach pour g à partir du théorème de séparation de Hahn-Banach.

1. On munit $E' \times \mathbb{R}$ de la norme $||(f, t)||_1 = ||x||_{E'} + |t|$. Montrer que $I : E' \times \mathbb{R} \to F'$, défini par
$$I(f, t) : (x, y) \mapsto f(x) + ty, x \in E, y \in \mathbb{R}, f \in E', t \in \mathbb{R},$$
est une isométrie surjective. On pourra donc identifier F' et $E' \times \mathbb{R}$ par l'intermédiaire de I.
2. Vérifier que $A = \{(x, t) \in F : p(x) < t\}$ est un convexe ouvert et que $B = \{(y, g(y)) \in F : y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel.
3. Appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à A et B.
4. En déduire, qu'il existe $f \in E', \lambda < 0, c \leq 0$ tel que pour tout $x \in E, y \in G$:
$$f(x) + \lambda p(x) \leq c \leq f(y) + \lambda g(y).$$

5. En déduire que la formule $G(x) = f(x/|\lambda|), x \in E$ définit un $G \in E'$ qui vérifie l'énoncé du théorème de prolongement de Hahn-Banach pour g.

Exercice 3 (8 points + Bonus 3 points)

Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la norme

$$||(x_1, ..., x_n)|| = ||(x_1, ..., x_n)||_\infty = \max_{i=1,...,n} |x_i|$$

et $E = C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, C^1, bornées de dérivées partielles bornées.

On le munit de la norme usuelle :

$$||f||_E = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right|.$$

On rappelle que $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel normé des fonctions lispchitziennes bornées à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^n$. On le munit de la norme légèrement différente de celle du cours :

$$||f||_{C^{0,1}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}.$$

On rappelle que E' est le dual de E et E'' le dual de E'.

1. Soit pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta_x : E \to \mathbb{R}$ défini par $\delta_x(f) = f(x)$. Montrer que δ_x est une forme linéaire continue $\delta_x \in E'$ et que $||\delta_x||_{E'} \leq 1$.
2. **Bonus : 1 point**. Montrer que la famille $\{\delta_x, x \in \mathbb{R}^n\}$ est libre.
3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\|\delta_x - \delta_y\|_{E'} \leq ||x - y||.$$
4. Montrer que la formule pour $f \in E''$, $I(f)(x) = f(\delta_x)$ définit une application linéaire continue $I : E'' \to C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$.
5. Soit $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. Soit $(\rho_n)_{n\geq 0}$ une suite régularisante. Soit $f_n = \rho_n * f$. Montrer que $f_n \in E$ et $||f_n||_E \leq ||f||_{C^{0,1}}$. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$
$$\sup_{||x||\leq l} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0.$$
6. Soit $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}, x_1, ..., x_n \in U$,
Déduire de la question précédente que
$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}\right\|_{E'} ||f||_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}.$$
7. Soit $F = Vect\{\delta_x, x \in \mathbb{R}^n\} \subset E'$ l'espace vectoriel engendré par les δ_x. Soit $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, on définit $g_f(\delta_x) = f(x)$ et on étend g_f par linéarité à F grâce à la question 2. Appliquer le théorème de Hahn-Banach à g_f et obtenir $P(f) \in E''$ avec $I(P(f)) = f$ (pour le I défini à la question 3) et
$$||P(f)||_{E''} \leq ||f||_{C^{0,1}}.$$
8. **Bonus : 2 points** On rappelle que $J : E \to E''$ est l'injection canonique tel que pour $f \in E$, $G \in E'$ $J(f)(G) = G(f)$. Montrer que J n'est pas surjective.