Université Claude Bernard $\hfill$ Mathématiques
M1G Analyse $\hfill$ 2016-2017

Correction du Contrôle continu du Lundi 14 novembre 2016
Lundi 14 novembre 2016

On munit toujours un dual E' de E de sa norme (d'opérateur) usuelle que l'on note $||.||_{E'}$.

Exercice 1 (5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f, g, h des formes linéaires sur E. On veut montrer l'équivalence entre :

(i) $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \lambda g + \mu h$;

(ii) $\exists M \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$: $|f(x)| \leq M(|g(x)| + |h(x)|)$.

C'est un cas particulier du TD.

1. On suppose (i). On obtient $|f(x)| \leq |\lambda||g(x)| + |\mu||h(x)| \leq M(|g(x)| + |h(x)|)$ pour $M = \max(|\lambda|, |\mu|)$
2. Voir cours.
3. $K_1 = \{(f(x), g(x), h(x)), x \in E\} \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ car c'est l'image de l'application linéaire $(f, g, h) : E \to \mathbb{R}^3$.
4. On suppose (ii). Appliquons le théorème de Hahn-Banach géométrique à K_1 et $\{(1, 0, 0)\}$.
   $\{(1, 0, 0)\}$. est un convexe compact non-vide. K_1 est un sous-espace de dimension fini donc un evn complet donc fermé dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc un convexe fermé. Ils sont disjoints car si $(f(x), g(x), h(x)) = (a, 0, 0)$ alors (ii) implique $|f(x)| = |a| \leq M(|g(x)| + |h(x)|) = 0$ donc $a = 0$. Donc $a \neq 1$.
   On peut donc appliquer Hahn-Banach, on obtient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $d \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$:
   $$af(x) + bg(x) + ch(x) < d < a.$$
5. En prenant $x = 0$ on voit $a > d > 0$. De plus, en prenant t>0, comme $tx \in E$ pour $x \in E$ on a $af(x) + bg(x) + ch(x) < t^{-1}d \to_{t\to\infty} 0$. Donc $af(x) + bg(x) + ch(x) \leq 0$. En remplaçant x par $-x \in E$ $af(x) + bg(x) + ch(x) \geq 0$. Donc $af(x) + bg(x) + ch(x) = 0$. Donc $\lambda = -b/a, \mu = -c/a$ conviennent comme $a > 0$
   On obtient (i).

Exercice 2 (7 points)

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$) et $G \subset E$ un sous espace vectoriel. Soit l'espace vectoriel $F = E \times \mathbb{R}$ muni de la norme $||(x, y)||_F = \max(||x||_E, |y|)$.

On considère $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire continue et $p : E \to [0, +\infty[$ continue vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \lambda \geq 0, p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

On suppose que pour tout $y \in G$,
$$g(y) \leq p(y).$$

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de prolongement de Hahn-Banach pour g à partir du théorème de séparation de Hahn-Banach.

1. On munit $E' \times \mathbb{R}$ de la norme $||(f,t)||_1 = ||x||_{E'} + |t|$. Montrons que $I : E' \times \mathbb{R} \to F'$, défini par
$$I(f,t) : (x,y) \mapsto f(x) + ty, x \in E, y \in \mathbb{R}, f \in E', t \in \mathbb{R},$$
est une isométrie surjective.
D'abord, I est bien défini car par linéarité de f, $I(f,t)$ est bien linéaire et :
$$|I(f,t)(x,y)| = |f(x)+ty| \leq ||f||_{E'}||x||_E + |t||y| \leq \max(||x||_E, |y|)(||x||_{E'}+|t|) = ||(f,t)||_1||(x,y)||_F$$
donc $I(f,t)$ est bien continue et $||I(f,t)||_{F'} \leq ||(f,t)||_1$.
Réciproquement, soit $x \in E$ avec $||x||_E \leq 1$, on a si $\epsilon = |f(x)|/f(x)1_{f(x)\neq 0}$ Soit $X = (x\epsilon, |t|/t1_{t\neq 0})$ alors $||X||_F \leq \max(||x||_E, 1) \leq 1$ donc
$$||I(f,t)||_{F'} \geq I(f,t)(X) = |f(x)| + |t|.$$
Comme ceci est pour tout x avec $||x||_E \leq 1$ en passant au sup, on obtient : $||I(f,t)||_{F'} \geq ||f||_{E'} + |t| = ||(f,t)||_1$ d'où l'égalité qui donne l'isométrie. La surjectivité est évidente car si $y \in F'$, on pose $f(x) = y(x,0)$ et $t = y(0,1)$ et on voit par linéarité que $y(x,x') = f(x) + tx' = I(f,t)(x,x')$ donc $y = I(f,t)$.
2. Vérifions que $A = \{(x,t) \in F : p(x) < t\}$ est un convexe ouvert et que $B = \{(y, g(y)) \in F : y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel.
Déjà $B = Im((Id, g))$ avec $(Id, g) : E \times E \to F$ une application linéaire donc c'est un sous-espace vectoriel. $A = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ donc c'est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par l'application continue $f(x,t) = p(x) - t$. Si on voit que f est convexe, on déduira aussi que A convexe comme image réciproque d'un segment initial. Or par homogénéité et sous-additivité :
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t + (1-\lambda)t') &= p(\lambda x + (1-\lambda)y) - (\lambda t + (1-\lambda)t') \\ &\leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) - \lambda t - (1-\lambda)t' = \lambda f(x,t) + (1-\lambda)f(y,t') \end{aligned}$$
On voit que si $f(y,t') < 0, f(x,t) < 0$ on obtient $f(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t + (1-\lambda)t') < 0$ d'où la convexité souhaité de A.
3. A est un convexe ouvert non-vide $(0,1) \in A$ et B un concexe non-vide $(0,0) \in B$. Pour Appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à A et B, il reste à voir qu'ils sont disjoints. Or si $(x, g(x)) \in B$ comme $g(x) \leq p(x)$ on n'a pas $p(x) < g(x)$ $(x, g(x)) \notin A$.
Il existe donc $f' \in F', c \in \mathbb{R}$ tel que pour $(x,t) \in A, y \in G$:
$$f'(x,t) < c \leq f'(y, g(y)).$$
4. Par le 2. $f' = I(f, \lambda)$ $f \in E', \lambda \in \mathbb{R}$ et la condition se réécrit :
$$f(x) + \lambda t < c \leq f(y) + \lambda g(y).$$
Pour $y = 0$ on voit $c \leq 0$. Pour $x = y$, $\lambda t < \lambda g(x)$ mais$(x,t) \in A$ donc $t > p(x) \geq g(x)$ ce qui n'est pas possible si $\lambda > 0$. Donc $\lambda \leq 0$. Le cas $\lambda = 0$ est aussi impossible car alors on aurait toujours en $x = y$ $f(x) < c \leq f(x)$, donc on a obtenu comme voulu :
$f \in E', \lambda < 0, c \leq 0$ tel que pour tout $x \in E, y \in G$:
$$f(x) + \lambda p(x) \leq c \leq f(y) + \lambda g(y).$$

5. Voyons que $G(x) = f(x/|\lambda|), x \in E$ définit $G \in E'$ vérifie l'énoncé du théorème de prolongement de Hahn-Banach pour g.
   D'abord, l'énoncé précédent devient pour tout $x \in E, y \in G$:
$$G(x) - p(x) \leq c \leq G(y) - g(y).$$
   Comme $c \leq 0$, on a bien la condition de domination $G(x) \leq p(x)$. Il reste à voir que G prolonge g. Or pour $t > 0$, si $y \in G, ty \in G$ $c/t \leq G(y) - g(y)$. en prenant $t \to \infty$ On obtient $0 \leq G(y) - g(y)$. En appliquant $-y \in G$ on a finalement $G(y) - g(y) = 0$.

Exercice 3 (8 points + Bonus 3 points)

Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la norme
$$||(x_1, ..., x_n)|| = \max_{i=1,...,n} (|x_i|)$$
et $E = C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, C^1, bornées de dérivées partielles bornées.

On le munit d'une norme légèrement différente de celle du cours :
$$||f||_E = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial_i} f(x) \right|.$$

On rappelle que $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel normé des fonctions lispchitziennes bornées à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme :
$$||f||_{C^{0,1}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|||x - y||}.$$

On rappelle que E' est le dual de E et E'' le dual du E'.

1. Soit pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta_x : E \to \mathbb{R}$ défini par $\delta_x(f) = f(x)$. La linéarité de l'évaluation δ_x est claire (de façon très pédante, c'est aussi la linéarité de l'intégrale par rapport à la mesure de Dirac). Or $|\delta_x(f)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \leq ||f||_E$, donc δ_x est bornée sur la boule unité donc $\delta_x \in E'$. De l'inégalité précédente on déduit $||\delta_x||_{E'} \leq 1$.
2. **Bonus 1 point** Montrons que la famille $\{\delta_x, x \in \mathbb{R}^n\}$ est libre. SOit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ Si on suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} = 0$ on va utiliser des fonctions d'interpolations (lisses à supports compacts donc dans E).
   SOit n tel que $|x_i - x_j| \geq 2/n$ pour tout $i \neq j$. Soit ρ_n une suite régularisante et $f_j(x) = \rho_n(x - x_j)/\rho_n(0)$. Par construction $f_j(x_j) = 1$ et comme le support de f_j est $B(x_j, 1/n)$ qui ne contient aucun autre x_i, $f_j(x_i) = 0, i \neq j$. En évaluant $(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i})(f_j) = \lambda_j = 0$
3. Montrons que pour $x \neq y \in \mathbb{R}^n$,
$$\|\delta_x - \delta_y\|_{E'} \leq ||x - y||.$$
   Il suffit de noter que pour tout $f \in E$, on a l'inégalité des accroissements finis (dont le calcul suivant redonne la preuve) :
$$|f(x) - f(y)| = |\int_0^1 df(y + s(x - y)).(x - y)ds| \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial_i} f(z) \right| ||x - y||_\infty \leq ||f||_E ||x - y||.$$
   Donc en passant au sup sur les f avec $||f||_E \leq 1$ on obtient l'inégalité souhaitée.

4. Montrons que la formule pour $f \in E''$, $I(f)(x) = f(\delta_x)$ définit une application linéaire continue $I : E'' \to C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$.
Montrons que I est bien défini. D'abord $f(\delta_x)| \leq ||f||_{E''}||\delta_x||_{E'}$ donc par le 1, f est bornée par $||f||_{E''}$. De plus,
$$|f(\delta_x) - f(\delta_y)| \leq ||f||_{E''} \left\|\delta_x - \delta_y\right\|_{E'} \leq ||f||_{E''}||x-y||$$
donc $I(f)$ est lipschitzienne. Donc I est bien définie à valeur l'espace souhaitée. Par définition du bidual, I est linéaire. De plus les inégalités précédentes montrenet que $||I(f)||_{C^{0,1}} \leq ||f||_{E''} + ||f||_{E''} = 2||f||_{E''}$. Donc I est continue.

5. Soit $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. Soit ρ_n une suite régularisante. Soit $f_n = \rho_n * f$.
Comme $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a vu en cours que $f_n = \rho_n * f$ est C^1 et $\nabla f_n = (\nabla \rho_n) * f$.
De plus $|f_n(x)| = |\int dy \rho_n(y) f(x-y)| \leq ||f||_\infty \int \rho_n(y) = ||f||_\infty$ comme ρ_n est une suite régularisante. Enfin
$$|f_n(x+th) - f_n(x)| \leq \int dy \rho_n(y)|f(x+th-y) - f(x)| \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||}||th||$$
Donc en divisant par t et prenant la limite :
$$|df_n(x)(h)|| \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||}||h||$$
Par le calcul de la norme duale de $||.||$ vu en TD, soit en prenant h borné du signe de chaque coordonné des dérivées partielle, on obtient :
$$\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial}{\partial_i} f_n(x)\right| \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||}$$
On a donc obtenu $||f_n||_E \leq ||f||_{C^{0,1}}$. Montrons comme e TD que pour tout $l \in \mathbb{N}$
$$\sup_{||x||\leq l} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0.$$
On a par l'inégalité triangulaire et la propriété de suite régularisante (intégrale 1, support et positivité).
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{B(0,1/n)} dy \rho_n(y)|f(x-y) - f(x)|$$
Or f est uniformément continue sur la boule fermé qui est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^n$) $B_F(0, 1+l)$ et pour $n \geq 1$ les $x-y, x$ de l'intégrale sont dans cette boule si $||x|| \leq l$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ on a n tel que pour $|y| < 1/n$, $|f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon$. Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ uniformément en $||x|| \leq l$ ce qui conclut $\sup_{||x||\leq l} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

6. Soit $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}, x_1, ...x_n \in U$, On prend f_n de la question précédente et on utilise $f_n(x_i) \to f(x)$.
Par définition de la norme de E', et la propriété sur la norme de f_n on a
$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_n(x_i)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}\right\|_{E'} ||f_n||_E \leq \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}\right\|_{E'} ||f||_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

En passant à la limite $n \to \infty$ on déduit :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right\|_{E'} ||f||_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

7. Soit $F = Vect\{\delta_x, x \in \mathbb{R}^n\} \subset E'$ l'espace vectoriel engendré par les δ_x. Soit $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, on définit $g_f(\delta_x) = f(x)$ et on étend g_f par linéarité à F grâce à la question 2. En effet comme les vecteurs sont linéairement indépendant, l'application linéaire est bien défini sur tous les espaces de dimension fini engendré par un nombre fini de vecteurs.

   Appliquons le théorème de Hahn-Banach à g_f avec pour seminorme la norme de E' multiplié par une constante $||f||_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}$. La question précédente vérifie :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g_f(\lambda_i \delta_{x_i})\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right\|_{E'} ||f||_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

   C'est la domination de l'hypothèse. Par construction g est linéaire, on l'étend donc en une application linéaire continue verifiant :$P(f) \in E''$ tel que $||P(f)||_{E''} \leq ||f||_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}$ d'après la domination pour l'extension.

   De plus par la propriété d'extension $I(P(f))(x) = P(f)(\delta_x) = g_f(\delta_x) = f(x)$ donc $I(P(f)) = f$

8. **Bonus : 2 points**On rappelle que $J : E \to E''$ est l'injection canonique tel que pour $f \in E, G \in E'$ $J(f)(G) = G(f)$. Montrons que J n'est pas surjective. En effet, $I(J(f))(x) = J(f)(\delta_x) = \delta_x(f) = f(x)$ donc $I(J(f)) = f$ et si J était surjective, comme la question précédente montre que J est surjective, toute fonctions lipschitzienne serait C^1. Or $f(x) = ||x||$ est 1-lipschitzienne mais non dérivable en 0 ce qui conclut.