Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2016-2017

Contrôle continu
Lundi 20 novembre 2017

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

On munit toujours un dual E' de E de sa norme (d'opérateur) usuelle que l'on note $||.||_{E'} = |||.|||$.

Exercice 1 (sur le cours : 5 points)

Soit H un espace de Hilbert.

1. Enoncer le théorème de projection sur un convexe fermé.
2. Soit, $f \in H'$ $K = Ker(f)$ un hyperplan fermé de H donné par le noyau de f. Montrer que H s'écrit comme la somme directe orthogonale $K \oplus K^\perp$.
3. En déduire le théorème de représentation de Riesz.

Exercice 2 (9 points) On rappelle que $\ell^\infty([0,1])$ est l'algèbre des fonctions bornées sur $[0,1]$. Soit $0 < \alpha < 1$. On définit

$$lip^\alpha([0,1]) = \{f \in \ell^\infty([0,1]) : \lim_{\delta\to 0} \sup_{0<|x-y|\leq\delta} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha} = 0\}.$$

On rappelle que

$$Lip^\alpha([0,1]) = C^{0,\alpha}([0,1]) := \{f \in \ell^\infty([0,1]) : \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}.$$

On munit $lip^\alpha([0,1]) \subset C^{0,\alpha}([0,1])$ de la norme :

$$||f||_{Lip^\alpha} = \max(\sup_{x\in X} |f(x)|, \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}).$$

1. Montrer que $lip^\alpha([0,1])$ est un fermé de $C^{0,\alpha}([0,1])$. En déduire que ce sont des espaces de Banach.
2. Soit $\delta_p : C^{0,\alpha}([0,1]) \to \mathbb{R}, p \in [0,1]$ défini par $\delta_p(f) = f(p)$. Montrer que δ_p est linéaire continue et
$$|||\delta_p||| = 1.$$
3. Montrer que
$$|||\delta_p - \delta_q||| \leq |p-q|^\alpha.$$
A-t-on égalité ?
4. Soit $f \in C^{0,\alpha}([0,1]), D = \{(x,x), x \in [0,1]\}$
$$T(f) = \int_{[0,1]^2-D} dLeb(x,y) \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$
Montrer que $T \in (lip^\alpha([0,1]))'$ et $|||T||| = 1$.

5. Existe-t-il $f \in lip^\alpha([0,1])$ avec $||f||_{Lip^\alpha} = 1$ tel que $T(f) = 1$?
6. On rappelle que $J : lip^\alpha([0,1]) \to (lip^\alpha([0,1]))''$ est défini par $J(x)(f) = f(x)$ pour $x \in lip^\alpha([0,1]), f \in (lip^\alpha([0,1]))'$. Montrer que J n'est pas surjectif.
7. Soit $g \in \ell^\infty([0,1])$, on pose
$$g_\alpha(x) = \inf_{y\in[0,1]} g(y) + |x-y|^\alpha.$$
Montrer que $g_\alpha \in C^{0,\alpha}([0,1])$.

Exercice 3 (6 points)

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$). Soit l'espace vectoriel $F = E \times \mathbb{R}$ muni de la norme $||(x,y)||_F = \max(||x||_E, |y|)$.

On considère $F : E \to \mathbb{R}$ convexe continue. On définit :
$$A = Epi(F) = \{(x,t) : F(x) \leq t\}, \quad B = \{(x,t) : F(x) < t\}$$
Soit $x \in E$ fixé, on pose enfin
$$\partial F(x) = \{g \in E' : \forall y \in E : g(y-x) \leq F(y) - F(x)\}.$$

1. Rappeler pourquoi $Epi(F)$ est un convexe fermé.
2. Montrer que B est l'intérieur de $Epi(F)$:
$$B = Int(Epi(F)).$$
3. Peut-on appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à A et $C = \{(x, F(x))\}$? (justifier)
4. Appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à B et C.
5. En déduire, qu'il existe $g \in E'$ non nul tel que pour tout $(y,t) \in B$:
$$g(y-x) \leq r - F(x).$$
6. En déduire, que $\partial F(x) \neq \{0\}$.
7. Montrer que $\partial F(x)$ est convexe fermé.