Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2017-2018

Correction du Partiel
Lundi 20 novembre 2017

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

On munit toujours un dual E' de E de sa norme (d'opérateur) usuelle que l'on note $||.||_{E'} = |||.|||$.

Exercice 1 (sur le cours : 5 points)
Soit H un espace de Hilbert.

1. Enoncer le théorème de projection sur un convexe fermé C.
2. Montrer la partie existence, c'est à dire que l'infimum $\inf_{y\in C} ||y-x||$ est atteint.
3. Soit, $f \in H'$, $K = Ker(f)$ un hyperplan fermé de H donné par le noyau de f. Montrer que H s'écrit comme la somme directe orthogonale $K \oplus K^{\perp}$.
4. En déduire le théorème de représentation de Riesz.

Exercice 2 (9 points) On rappelle que $\ell^{\infty}([0,1])$ est l'algèbre des fonctions bornées sur $[0,1]$. Soit $0 < \alpha < 1$. On définit

$$lip^{\alpha}([0,1]) = \Big\{ f \in \ell^{\infty}([0,1]) : \lim_{\delta\to 0} \sup_{0<|x-y|\leq\delta} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = 0 \Big\}.$$

On rappelle que

$$Lip^{\alpha}([0,1]) = C^{0,\alpha}([0,1]) := \Big\{ f \in \ell^{\infty}([0,1]) : \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty \Big\}.$$

On munit $lip^{\alpha}([0,1]) \subset C^{0,\alpha}([0,1])$ de la norme :

$$||f||_{Lip^{\alpha}} = \max\Big(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \Big).$$

1. Montrons que $lip^{\alpha}([0,1])$ et $C^{0,\alpha}([0,1])$ sont des espaces de Banach.
On a vu en cours que $C^{0,\alpha}([0,1])$ est un evn complet pour la norme

$$||f||_{C^{0,\alpha}} = \Big(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \Big).$$

On a l'équivalene des normes $|||f||_{Lip^{\alpha}} \leq ||f||_{C^{0,\alpha}} \leq 2||f||_{Lip^{\alpha}}$ donc $C^{0,\alpha}([0,1])$ est aussi complet pour la nouvelle norme (cf plus bas pour voir que c'est une norme).
On peut aussi voir que $C^{0,\alpha}([0,1])$ est complet de la façon suivante.
Soit $I : C^{0,\alpha}([0,1]) \to \ell^{\infty}([0,1]) \oplus^{\infty} \ell^{\infty}([0,1]^2 - D)$ défini par $I(f) = (f, g_f)$ avec $g_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}$. Noter l'absence de valeur absolu au numérateur pour garantir la linéarité. L'espace source est exactement défini pour que I soit bien défini, i.e. g_f bornée. Par définition, $||f||_{Lip^{\alpha}} = ||I(f)||_{\infty}$ donc $||\cdot||_{Lip^{\alpha}}$ est bien une norme comme composée d'une application linéaire injective

(d'inverse la première projection sur son image, l'injectivité donne la séparation $||f|| = 0 = ||I(f)||$ implique $I(f) = 0$ donc $f = 0$) et d'une norme.

Et la norme est ainsi défini pour que I soit une isométrie. Il suffit de voir que $Im(I)$ qui est donc isométriquement isomorphe à $C^{0,\alpha}([0,1])$ est fermé. Soit donc f_n avec $(f_n, g_{f_n}) \to (f, g)$ alors g_{f_n} converge ponctuellement vers g_f de sorte que $g_f = g$ ce qui montre que $Im(I)$ fermé.

Voyons que $lip^\alpha([0,1])$ est sev fermé dans $C^{0,\alpha}([0,1])$ qu'on vient de voir complet. Cela impliquera que c'est un sev complet donc un espace de Banach.

Soit la seminorme $p_\delta(f) := \sup_{0<|x-y|\leq\delta} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq ||f||_{Lip^\alpha}$ (on voit que c'est une seminorme comme avant en composant une application linéaire avec une norme) Si $f_n \in lip^\alpha([0,1])$ convergent vers f dans $C^{0,\alpha}([0,1])$. On veut voir $f \in lip^\alpha([0,1])$. Soit donc $\epsilon > 0$, il existe n tel que $||f - f_n||_{Lip^\alpha} \leq \epsilon/2$ puis soit $\delta > 0$ tel que $p_\delta(f_n) \leq \epsilon/2$. Alors, $p_\delta(f) \leq p_\delta(f_n) + p_\delta(f - f_n) \leq \epsilon$. Ainsi on a la limite $\lim_{\delta\to 0} p_\delta(f) = 0$ de sorte que $f \in lip^\alpha([0,1])$. Donc $lip^\alpha([0,1])$ est fermé. De même, $0 \in lip^\alpha([0,1])$ et $p_\delta(f + \lambda g) \leq p_\delta(f) + |\lambda| p_\delta(g) \to_{\delta\to 0} 0$ si $f, g \in lip^\alpha([0,1])$, donc $lip^\alpha([0,1])$ est bien un sous-espace vectoriel.

2. Montrons que pour $\alpha < \beta < 1$, on a l'inclusion continue $C^{0,\beta}([0,1]) \subset lip^\alpha([0,1])$. D'abord pour $|x - y| \leq 1$, on a $|x - y|^\beta = exp(\beta \ln |x - y|) \leq |x - y|^\alpha$ (vu $\ln |x - y| \leq 0$) et donc $|x - y|^{-\alpha} \leq |x - y|^{-\beta}$ donc en multipliant, passant au sup et au max : $||f||_{Lip^\alpha} \leq ||f||_{Lip^\beta}$. D'où $C^{0,\beta}([0,1]) \subset Lip^\alpha([0,1])$ et la continuité de l'inclusion. Il reste à voir que l'on a inclusion dans l'espace plus petit $lip^\alpha([0,1])$ (la continuité sera induite comme la norme). Or soit $f \in C^{0,\beta}([0,1])$
$$\sup_{0<|x-y|\leq\delta} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} |x - y|^{\beta-\alpha} \leq \delta^{\beta-\alpha} \sup_{0<|x-y|\leq\delta} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} \leq \delta^{\beta-\alpha} ||f||_{Lip^\beta} \to_{\delta\to 0} 0.$$
Ceci donne $f \in lip^\alpha([0,1])$ et conclut.

3. Soit $\delta_p : C^{0,\alpha}([0,1]) \to \mathbb{R}, p \in [0,1]$ défini par $\delta_p(f) = f(p)$. Montrons que δ_p est linéaire continue et
$$|||\delta_p||| = 1.$$
δ_p est clairement linéaire (évaluation). 0n a $|f(p)| \leq ||f||_\infty \leq ||f||_{Lip^\alpha}$ donc δ_p borné sur la boule unité donc linéaire continue de norme $|||\delta_p||| \leq 1$. Enfin, en $f = 1$, $\delta_p(f) = 1$ et $p_1(f) = 0$ donc $||f||_{Lip^\alpha} = 1$ d'où l'égalité $|||\delta_p||| = 1$.

4. Montrons que
$$|||\delta_p - \delta_q||| \leq |p - q|^\alpha.$$
Par définition $|(\delta_p - \delta_q)(f)| = |f(p) - f(q)| \leq ||f||_{Lip^\alpha} |p - q|^\alpha$ de sorte qu'on a bien en passant au sup sur f avec $||f||_{Lip^\alpha} \leq 1$: $|||\delta_p - \delta_q||| \leq |p - q|^\alpha$.

5. **Bonus 1 point**Soit $q > p$ sans perte de généralité (par symétrie et égalité évidente du cas $p = q$). On a égalité car soit $f(x) = (x - p)_+^\alpha$, on a pour $q \geq r \geq p$ par l'inégalité rappellé dans le sujet
$$|f(r) - f(q)| = (q - p)^\alpha - (r - p)^\alpha \leq |q - r|^\alpha$$
si $q \geq p \geq r$
$$|f(r) - f(q)| = (q - p)^\alpha - 0 \leq |q - r|^\alpha$$
par croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur $[0,1]$.

Enfin, l'inégalité est évidente pour $r, q \leq p$ donc f est Holderienne, vu aussi $||f||_\infty \leq f(1) \leq 1$, on a $||f||_{Lip^\alpha} \leq 1$. Enfin, $|(\delta_p - \delta_q)(f)| = (q - p)^\alpha - 0 = |q - p|^\alpha$ et donc $|||\delta_p - \delta_q||| = |p - q|^\alpha$.

6. Soit $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$, on pose :

$$T(f) = \int_{]0,1]} dx \frac{f(x) - f(0)}{|x|^\alpha}.$$

Montrons que cette formule définit $T \in (lip^\alpha([0,1]))'$ et $||T||_{(lip^\alpha([0,1]))'} = 1$.
T est bien défini car on intègre une fonction bornée, continue sur $]0,1]$ (car f Holderienne donc continue et par somme et quotient à dénominateur non nul) et on obtient la borne $|T(f)| \leq \int_{]0,1]} dx \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\alpha} \leq \int_{]0,1]} dx p_1(f) \leq ||f||_{Lip^\alpha}$. T est linéaire par linéarité de l'intégrale et bornée sur la boule unité donc continue d'où $|||T||| \leq 1$.
Prenons $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > \alpha$ de sorte que, par le rappel $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\beta = o(|x-y|^\alpha)$
On a donc bien β-HOldérienne et bornée donc dans $lip^\alpha([0,1])$ et $T(f) = \int_0^1 x^{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha+1}$, $||f||_\infty = 1$ et $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$ donc $||f||_{Lip^\alpha} \leq 1$ d'où $|||T||| \geq \frac{1}{\beta-\alpha+1} \to_{\beta\to\alpha} 1$. On conclut donc à l'égalité $|||T||| = 1$. Note qu'on ne peut pas prendre $\beta = \alpha$ car la fonction est seulement dans $C^{0,\alpha}([0,1])$.

7. Voyons qu'il n'existe pas $f \in lip^\alpha([0,1])$ avec $||f||_{Lip^\alpha} = 1$ tel que $T(f) = 1$?
En effet si $||f||_{Lip^\alpha} \leq 1$ l'intégrant de $T(f)$ est inférieur à 1 et l'intégrale ne vaut 1 que si $f(x) - f(0)/|x-0|^\alpha = 1$ p.p soit par continuité cela force $f(x) = f(0) + |x|^\alpha$ mais la valeur en 1,0 impose $f(0) \in [-1, 0]$ dans tous les cas la valeur $(f(x) - f(0))/|x-0|^\alpha$ ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$ donc $f \notin lip^\alpha([0,1])$.

8. On rappelle que $J : lip^\alpha([0,1]) \to (lip^\alpha([0,1]))''$ est défini par $J(x)(f) = f(x)$ pour $x \in lip^\alpha([0,1]), f \in (lip^\alpha([0,1]))'$. Montrons que J n'est pas surjectif.
Par Hahn-Banach, il existe $g \in (lip^\alpha([0,1]))''$ avec $||g|| \leq 1$ tel que $g(T) = |||T||| = 1$ si on avait $g = J(f), f \in lip^\alpha([0,1])$ cela impliquerait $T(f) = 1$ or J est isométrique par Hahn-Banach encore, donc $||f|| \leq 1$ ce qui contredirait la question précédente.

9. Soit $g \in \ell^\infty([0,1])$, on pose

$$g_\alpha(x) = \inf_{y\in[0,1]} g(y) + |x-y|^\alpha.$$

Montrons que $g_\alpha \in C^{0,\alpha}([0,1])$.
D'abord $g_\alpha(x) \leq g(x) \leq ||g||_\infty$ $g_\alpha(x) \geq \inf_{y\in[0,1]} g(y) \geq -||g||_\infty$ donc g_α est bornée.
On va utiliser que par l'inégalité triangulaire et l'inégalité de convexité rappelée : $|x-y|^\alpha \leq (|x-z| + |z-y|)^\alpha \leq |z-y|^\alpha + |x-z|^\alpha$
Donc pour tout y

$$g_\alpha(x) \leq g(y) + |x-y|^\alpha \leq g(y) + |z-y|^\alpha + |x-z|^\alpha$$

Soit en passant à l'infimum en y :

$$g_\alpha(x) \leq g_\alpha(z) + |x-z|^\alpha.$$

Par symétrie cela donne $p_1(g_\alpha) \leq 1$.

Exercice 3 (6 points)

Soit E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$). Soit l'espace vectoriel $G = E \times \mathbb{R}$ muni de la norme $||(x,y)||_G = \max(||x||_E, |y|)$.

On considère $F : E \to \mathbb{R}$ convexe continue. On définit :

$$A = Epi(F) = \{(x,t) \in G : F(x) \leq t\}, \quad B = \{(x,t) \in G : F(x) < t\}$$

Soit $x \in E$ fixé, on pose enfin

$$\partial F(x) = \{g \in E' : \forall y \in E : g(y-x) \leq F(y) - F(x)\}.$$

1. Rappelons pourquoi $Epi(F)$ est un convexe fermé.
   Cela vient du fait que F convexe continue. En effet, $f(x,t) = (F(x) - t)$ est encore continue et $A = f^{-1}(]-\infty, 0])$ est fermé comme image inverse d'un fermé par une application continue. Pour convexe c'est la defintion du cours mais à l'agreg il faudrait le revoir avec la definition usuelle : si $(x_i, t_i) \in A$ d'où $F(x_i) \leq t_i$, $\lambda \in]0,1[$
   $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)$ donc $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \in A$
2. Montrons que B est l'intérieur de $Epi(F)$:

$$B = Int(Epi(F)).$$

   Clairement $B \subset Epi(F)$ et $B = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ est ouvert comme image inverse d'un ouvert par une application continue f. Donc $B \subset Int(Epi(F))$. Montrons que $B^c \subset \overline{A^c}$. en effet si $(x,t) \in B^c$ $F(x) \geq t > t - 1/n$ donc $(x, t-1/n) \in A^c$ donc $(x,t) = \lim(x, t-1/n) \in \overline{A^c}$ d'où l'inclusion qui se réécrit en passant au complémentaire : $B \supset Int(A) = (\overline{A^c})^c$.
3. On munit $E' \times \mathbb{R}$ de la norme $||(f,t)||_1 = ||x||_{E'} + |t|$. Montrons que $I : E' \times \mathbb{R} \to F'$, défini par

$$I(f,t) : (x,y) \mapsto f(x) + ty, x \in E, y \in \mathbb{R}, f \in E', t \in \mathbb{R},$$

   est une isométrie surjective.
   D'abord, I est bien défini car par linéarité de f, $I(f,t)$ est bien linéaire et :

$$|I(f,t)(x,y)| = |f(x)+ty| \leq ||f||_{E'}||x||_E + |t||y| \leq \max(||x||_E, |y|)(||x||_{E'} + |t|) = ||(f,t)||_1||(x,y)||_F$$

   donc $I(f,t)$ est bien continue et $||I(f,t)||_{F'} \leq ||(f,t)||_1$.
   Réciproquement, soit $x \in E$ avec $||x||_E \leq 1$, on a si $\epsilon = |f(x)|/f(x)1_{f(x)\neq 0}$ Soit $X = (x\epsilon, |t|/t1_{t\neq 0})$ alors $||X||_F \leq \max(||x||_E, 1) \leq 1$ donc

$$||I(f,t)||_{F'} \geq I(f,t)(X) = |f(x)| + |t|.$$

   Comme ceci est pour tout x avec $||x||_E \leq 1$ en passant au sup, on obtient : $||I(f,t)||_{F'} \geq ||f||_{E'} + |t| = ||(f,t)||_1$ d'où l'égalité qui donne l'isométrie. La surjectivité est évidente car si $y \in F'$, on pose $f(x) = y(x,0)$ et $t = y(0,1)$ et on voit par linéarité que $y(x,x') = f(x) + tx' = I(f,t)(x,x')$ donc $y = I(f,t)$.
4. Peut-on appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach à A et $C = \{(x, F(x))\}$? Non car $(x, F(x)) \in A$ les deux convexes ne sont pas disjoints.
5. Appliquons le théorème de séparation de Hahn-Banach à B et C. C est un convexe car un point et on n'a pas $F(x) < F(x)$ donc C et B disjoints. On a vu en cours (thm des jauges) que l'intérieur d'un convexe est convexe donc B convexe ouvert. La première forme géométrique de Hahn-Banach donne $f \in G'$ $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (y,s) \in B, \quad f(y,s) < c \leq f(x, F(x)).$$

6. $f = I(h, \lambda)$ par le 3 donc le résultat de la question précédente se réécrit :

$$\forall (y,s) \in B, \quad h(y) + \lambda s < c \leq h(x) + \lambda F(x).$$

or $(y, F(y)+1) \in B$ donc $h(x) + \lambda(F(x)+1) < c \leq h(x) + \lambda F(x)$ ce qui implique $\lambda < 0$
On pose $g = -h/\lambda$ ce qui donne l'équation :

$$\forall (y,s) \in B, \quad g(y) - s < c \leq g(x) - F(x).$$

ce qui donne bien pour tout $(y, r) \in B$:

$$g(y - x) \leq r - F(x).$$

7. Montrons que $g \in \partial F(x)$ donc $\partial F(x)$ est non vide.
En effet $(y, F(y) + 1/n) \in B$ donc $g(y-x) \leq F(y) + 1/n - F(x)$.
En passant à la limite on obtient l'équation voulue : $g(y-x) \leq F(y) - F(x)$.
8. Montrons que $\partial F(x)$ est convexe fermé.
En effet, pour $\lambda \in]0,1[, g, h \in \partial F(x)$, on a $(\lambda g + (1-\lambda)h)(y-x) \leq \lambda(F(y) - F(x)) + (1-\lambda)(F(y) - F(x)) = (F(y) - F(x))$. Cela donne le convexité.
De plus si $g_n \to g$, a fortiori on a convergence faible donc $g_n(y-x) \to g(y-x)$. donc On passe à la limite dans l'inégalité dans le cas $g_n \in \partial F(x)$, $g_n(y-x) \leq F(y) - F(x)$ ce qui donne$g(y-x) \leq F(y) - F(x)$ soit $g \in \partial F(x)$ qui est donc bien fermé.