Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2015-2016

Contrôle continu 3
Lundi 30 novembre 2015

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (9 points + Bonus : 4 points)

Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des suites bornées à valeur réel muni de sa norme sup usuelle.

On rappelle l'identification de E au dual de $\ell^1(\mathbb{N})$, espace des suites sommables, par l'application $T : E \to (\ell^1(\mathbb{N}))'$ donné, pour $(u_n)_{n\geq 0} \in E, (v_n)_{n\geq 0} \in \ell^1(\mathbb{N})$, par :

$$T(u)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

On note e_n le vecteur de E correspondant à la suite nulle sauf sur la cordonnée n où elle vaut 1.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans E, où $x_n = (y_{i,n})_{i\geq 0}$.
   Prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers 0 (c'est-à-dire pour la topologie $\sigma(E, \ell^1(\mathbb{N}))$) si et seulement si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et pour chaque i, on a
   $$\lim_{n\to\infty} y_{i,n} = 0.$$
2. Soit $z = (z_n)_{n\geq 0}$ dans la boule unité de E. Soit
   $$Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k e_k.$$
   Montrer que (Z_k) converge préfaiblement vers z.
   Quel résultat de densité du cours retrouve-t-on ?
3. On pose $y_{n,m} := e_n + n e_m$. Montrer que l'ensemble
   $$X := \{y_{n,m} : m > n \geq 1\}$$
   est normiquement fermé dans E.
4. Montrer que $(y_{n,m})_{m\geq 0}$ converge préfaiblement vers e_n (pour $m \to \infty$).
   En déduire que 0 est dans l'adhérence préfaible de X.
5. Montrer qu'aucune suite de X ne converge préfaiblement vers 0.
6. Soit $F_2 : E \to \mathbb{R}$ définie par
   $$F_2((u_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |u_n|^2,$$
   Montrer que F_2 est convexe et calculer la sous-différentielle $\partial F_2(u)$ pour $u = (u_n)_{n\geq 0}$.
7. [**Bonus : 4 points**] Soit $G = c_0(\mathbb{N}) \subset E$ l'ensemble des suites convergeant vers 0.
   Soit $F_1 : G \to \mathbb{R}$ définie par
   $$F_1((u_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |u_n|.$$
   Montrer que F_1 est convexe et continue et calculer la sous-différentielle $\partial F_1(0)$.

Exercice 2 (sur le cours : 7 points)

Soit H un espace de Hilbert.

1. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé C de H.
   On cherche dans les 2 questions suivantes à montrer l'existence et l'unicité dans le théorème.
2. Soit $x \in H$ et $(x_n) \in C$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $||x_n - x||$ converge vers $d = \inf_{c \in C} ||x - c||$.
   Montrer que x_n converge dans H. Pourquoi la limite est-elle la projection de x sur C ?
3. Montrer l'unicité de la projection dans le théorème.
4. On cherche maintenant à appliquer le théorème.
   Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H. On pose $F_n = Vect(x_1, ..., x_n)$.
   Rappeler pourquoi F_n est fermé et donner une formule pour la projection orthogonale P_n sur F_n.
5. En déduire, l'inégalité de Bessel.

Exercice 3 (4 points + Bonus : 2 points)

Soit $H = L^2([0,1], Leb)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Soit

$$h_{n,m}(x) = 2^{n/2} 1_{[m/2^n,(m+1/2)/2^n[}(x) - 2^{n/2} 1_{[(m+1/2)/2^n,(m+1)/2^n[}(x)$$

avec 1_A la fonction indicatrice de A, valant 1 sur A et 0 sur son complémentaire A^c.

1. Montrer que $1 \cup \{h_{n,m} : 0 \leq m < 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale de H.
2. [**Bonus : 2 points**] Montrer que c'est aussi une base hilbertienne de H.