Université Claude Bernard — Mathématiques
M1G Analyse — 2015-2016

Contrôle continu 3
Lundi 30 novembre 2015

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (9 points + Bonus : 4 points)

Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des suites bornées à valeur réel muni de sa norme sup usuelle.

On rappelle l'identification de E au dual de $\ell^1(\mathbb{N})$, espace des suites sommables, par l'application $T : E \to (\ell^1(\mathbb{N}))'$ donné pour $(u_n)_{n\geq 0} \in E, (v_n)_{n\geq 0} \in \ell^1(\mathbb{N})$ par :

$$T(u)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

On note e_n le vecteur de E correspondant à la suite nulle sauf sur la cordonnée n où elle vaut 1.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans E, où $x_n = (y_{i,n})_{i\geq 0}$.
   Prouvons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers 0 (c'est-à-dire pour la topologie $\sigma(E, \ell^1(\mathbb{N}))$) si et seulement si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et pour chaque i, on a

   $$\lim_{n\to\infty} y_{i,n} = 0.$$

   Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, où $x_n = (y_{i,n})_{i\geq 0}$.
   Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers 0, elle est bornée par la conséquence de Banach-Steinhauss vue en cours. De plus, pour $e_i \in \ell^1(\mathbb{N})$, $T(x_n)(e_i) = y_{i,n} \to_{n\to\infty} 0$
   Réciproquement, on suppose x_n bornée par M et $\lim_{n\to\infty} y_{i,n} = 0.$, soit $v \in \ell^1(\mathbb{N}), \epsilon > 0$, on prend N telle que $(\sum_{n=N}^{\infty} |v_n|) \leq \epsilon/2M$. Par somme finie $\sum_{i=0}^{N-1} y_{i,n} v_i \to_{n\to\infty} 0$ donc soit K tel que si $n \geq K$ alors $|\sum_{i=0}^{N-1} y_{i,n} v_i| \leq \epsilon/2$
   Enfin pour $n \geq K$, en décomposant les premiers termes et le reste et appliquant Hölder au reste :

   $$|T(x_n)(v)| \leq |\sum_{i=0}^{N-1} y_{i,n} v_i| + \sup_{i\in[N,\infty[} |y_{n,i}| (\sum_{i=N}^{\infty} |v_i|) \leq \epsilon/2 + ||x_n||_\infty \epsilon/2M \leq \epsilon.$$

   Donc on a bien $T(x_n)(v) \to 0$ et ce pour tout $v \in \ell^1(\mathbb{N})$ et donc x_n converge préfaiblement vers 0.

2. Soit $z = (z_n)_{n\geq 0}$ dans la boule unité de E. Soit $Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k e_k$. Pour montrer que (Z_k) converge préfaiblement vers z, on note que $||Z_k|| = \sup_{i=1,\ldots k} |z_i| \leq ||z|| \leq 1$, donc $||Z_k - z|| \leq 2$ et $Z_k - z$ est donc une suite bornée. De plus la i ème coordonnée $(Z_n - z)_i = 0$ pour $i \leq n$ donc tend vers 0 pour $n \to \infty$. Par le 1 $(Z_n - z)$ converge préfaiblement vers 0. On retrouve le lemme de Goldstine car $(c_0(\mathbb{N}))'' = E$ et la boule unité de $c_0(\mathbb{N})$ contient Z_n et est donc préfaiblement dense dans la boule unité de E.

3. On pose $y_{n,m} := e_n + ne_m$. Montrer que l'ensemble

$$X := \{y_{n,m} : m > n \geq 1\}$$

est normiquement fermé dans E.

Si $m \neq m'$, on a $||y_{n,m} - y_{n,m'}|| \geq |y_{n,m} - y_{n,m'}(m)| \geq 1$ et si $n \neq n'$ disons $n < n'$ $||y_{n,m} - y_{n',m'}|| \geq |y_{n,m} - y_{n',m'}(n)| \geq 1$ car $n < m, m', n'$. Dans tous les cas si $(n, m) \neq (n', m')$ on a $||y_{n,m} - y_{n',m'}|| \geq 1$ donc X est un espace discret donc toute suite convergente est stationnaire et donc X est fermé.

4. Montrons que $(y_{n,m})_{m\geq 0}$ converge préfaiblement vers e_n (pour $m \to \infty$). Comme $y_n = e_n + ne_m$ et que l'addition et la multiplication sont préfaiblement continues, il suffit de voir que e_m converge préfaiblement vers 0. Or e_m est de norme borné par 1 et $(e_m)_i$ est stationnaire égale à 0 pour chaque i quand $m \to \infty$ donc par le 1 on a la convergence préfaible indiquée. ON déduit que e_n est dans l'adhérence préfaible de X, et donc aussi sa limite préfaible 0 (car l'adhérence préfaible de l'adhérence préfaible est l'adhérence préfaible).

5. Montrons qu'aucune suite de X ne converge préfaiblement vers 0. En effet si $y_{n_k,m_k} \rightharpoonup^*_{k\to\infty} 0$ on montre que $n_k \to \infty$ car si N fixé, pour le nombre fini d'indices $i \leq N$ on peut trouver k grand tel que $|y_{n_k,m_k}(i)| \leq 1/2 < y_{n_k,m_k}(n_k)$ de sorte que $n_k > N$ (puisque il ne peut pas être parmi les valeurs inférieures).

Or $||y_{n_k,m_k}||_\infty \geq |y_{n_k,m_k}(m_k)| = n_k \to \infty$ donc (y_{n_k,m_k}) n'est pas bornée, ce qui contredit sa convergence préfaible.

6. Soit $F_2 : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_2((u_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|u_n|^2,$$

Montrons que F_2 est convexe

$$\begin{aligned}F_2(\lambda(u_n)_{n\geq 0}) + (1-\lambda)(v_n)_{n\geq 0})) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\lambda u_n + (1-\lambda)(v_n)|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\lambda|u_n|^2 + (1-\lambda)|(v_n)|^2) = \lambda F_2((u_n)_{n\geq 0}) + (1-\lambda)F_2((v_n)_{n\geq 0})\end{aligned}$$

comme x^2 est convexe par l'identité du parallélogramme ou

$$\lambda x + (1-\lambda)y)^2 - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 = -\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leq 0.$$

Montrons que F_2 est différentiable (au sens de Fréchet) de sorte $\partial F_2(u) = \{dF_2(u)\}$ pour $u = (u_n)_{n\geq 0}$ avec

$$dF_2(u).(h) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}u_n h_n,$$

En effet, on a la relation montrant la différentiabilité :

$$|F_2(u+h) - F_2(u) - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}u_n h_n| = |F_2(h)| \leq ||h||^2 = o(||h||)$$

7. [**Bonus : 4 points**] Soit $G = c_0(\mathbb{N}) \subset E$ l'ensemble des suites convergeant vers 0.
Soit $F_1 : G \to \mathbb{R}$ définie par
$$F_1((u_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|u_n|.$$
Montrons que F_1 est convexe (facile : sommer les inégalités de convexités de $|.|$) et continue car 1-lipschitzienne en utilisant l'inégalité triangulaire inverse :
$$|F_1((u_n)_{n\geq 0}) - F_1((v_n)_{n\geq 0})| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,||u_n| - |v_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,|u_n - v_n| \leq ||u-v||_\infty$$
et calculer la sous-différentielle
$$\partial F_1(0) = \{f = (f_n)_{n\geq 0}) \in G' = \ell^1(\mathbb{N}) : \sum f_n u_n \leq F_1((u_n)_{n\geq 0})\}$$
Montrons que $\partial F_1(0) = \{f = (f_n)_{n\geq 0}) \in G' = \ell^1(\mathbb{N}), |f_n| \leq 1/2^n\}$ $\supset$ est clair
Réciproquement si il existe n tel que $|f_n| > 1/2^n$ alors $f(e_n) = f_n > F_1(e_n) = 1/2^n$ donc $f \notin \partial F_1(0)$.

Exercice 2 (sur le cours :7 points)

Soit H un espace de Hilbert.

1. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé C de H (cf. cours).
On cherche dans les 2 questions suivantes à montrer l'existence et l'unicité dans le théorème.
2. Soit $x \in H$ et $(x_n) \in C$ tel que $||x_n - x||$ converge vers $\inf_{c\in C}||x-c||$. Montrer que x_n converge dans H.
En appliquant l'identité du parallélogramme à $a = x - x_n, b = x - x_m$, on trouve :
$$\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(||x-x_n||^2 + ||x-x_m||^2) \to d^2.$$
Or par convexité $\frac{x_n+x_m}{2} \in C$ donc $\left\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2 \geq d^2$ donc
$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(||x-x_n||^2 + ||x-x_m||^2) - d^2 \to 0.$$
On déduit donc que x_n est de Cauchy, donc , par complétude de H , converge vers u et par continuité de la norme $d = ||x-u||$.
3. Montrer l'unicité de la projection dans le théorème.
Pour voir l'unicité, si $u_1, u_2 \in C$, on peut utiliser la convexité stricte sous la forme de l'identité du parallélogramme, on a
$$\left\|x - \frac{u_1 + u_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u_1 - u_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(||x-u_1||^2 + ||x-u_2||^2) = d^2$$
soit comme $\left\|x - \frac{u_1+u_2}{2}\right\|^2 \geq d^2$ on déduit $\left\|\frac{u_1-u_2}{2}\right\|^2 \leq 0$ donc $u_1 = u_2$.

4. On cherche maintenant à appliquer le théorème.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H. On pose $F_n = Vect(x_1, ..., x_n)$. F_n est de dimension finie donc complet donc fermé et donnons une formule pour la projection P_n sur F_n.
On a
$$\langle x_j, x - \sum_{i\in F} x_i\langle x_i, x\rangle\rangle = \langle x_j, x\rangle - \sum_{i\in F}\langle x_j, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle = 0$$
comme $\langle x_j, x_i\rangle$ donc $x - \sum_{i\in F} x_i\langle x_i, x\rangle \in V^\perp$ donc par caractérisation de la projection orthogonale
$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\langle x_i, x\rangle.$$

5. Donc par la propriété de contraction et l'orthonormalité $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$
$$||P_n(x)||^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\langle x_i, x\rangle, \sum_{j=1}^{n} x_j\langle x_j, x\rangle\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\langle x_i, x\rangle}\langle x_i, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x\rangle|^2 \leq ||x||^2$$
la famille est donc sommable et on a l'inégalité de Bessel pour la somme :
$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, x\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

Exercice 3 (4 points + Bonus : 2 points) Soit $H = L^2([0, 1])$ Soit
$$h_{n,m}(x) = 2^{n/2}1_{[m/2^n,(m+1/2)/2^n[}(x) - 2^{n/2}1_{[(m+1/2)/2^n,(m+1)/2^n[}(x)$$
avec 1_A la fonction indicatrice de A, valant 1 sur A et 0 sur son complémentaire A^c.

1. Montrer que $A = 1 \cup \{h_{n,m} : 0 \leq m < 2^n, n, m \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale de H.
D'abord calculons la norme :
$$||h_{n,m}||^2 = \int_0^1 dx|h_{n,m}(x)|^2 = \int_{m/2^n}^{(m+1/2)/2^n} dx2^n + \int_{(m+1/2)/2^n}^{(m+1)/2^n} dx2^n = 2^n/2^n = 1$$
Pour $m' \neq m$ $h_{n,m}h_{n,m'} = 0$ car les supports des indicatrices sont distincts donc les fonctions sont orthogonales.
Si $n' > n, m', m$, les supports donnés sont distincts sauf si $[m'/2^{n'}, (m' + 1)/2^{n'}[\subset [m/2^n, (m + 1/2)/2^n[$ ou $[m'/2^{n'}, (m' + 1)/2^{n'}[\subset [(m + 1/2)/2^n, (m + 1)/2^n[$ auquel cas on a $h_{n,m}h_{n',m'} = 2^{n/2}h_{n',m'}$ dans le premier cas ou $h_{n,m}h_{n',m'} = -2^{n/2}h_{n',m'}$ dans le deuxième cas.
Dans les deux cas, il suffit de monter que tous les $h_{n,m}$ sont orthogonaux à 1 pour conclure.
Or on a le calcul :
$$\int_0^1 dxh_{n,m}(x) = \int_{m/2^n}^{(m+1/2)/2^n} dx2^{n/2} - \int_{(m+1/2)/2^n}^{(m+1)/2^n} dx2^{n/2} = 2^{-n/2} - 2^{-n/2} = 0.$$

2. **[Bonus : 2 points]** On montre par récurrence sur n que $1_{[m/2^n,(m+1/2)/2^n[}$, $1_{[(m+1/2)/2^n,(m+1)/2^n[}$ sont dans $Vect(A)$.
Pour $n = 0$, $0 \leq m < 1$, on a $1_{[m/2^n,(m+1/2)/2^n[} = 1_{[0,1/2[} = (h_{0,0} + 1)/2, 1_{[1/2,1[} = (1 - h_{0,0})/2$.

De plus en appliquant l'hypothèse de récurrence au rang n,

$$1_{[2m/2^{n+1},(2m+1/2)/2^{n+1}[} = (2^{-n/2-1/2}hn+1,2m + 1_{[m/2^n,(m+1/2)/2^n[})/2$$

$$1_{[(2m+1/2)/2^{n+1},(2m+1)/2^{n+1}[} = (1_{[m/2^n,(m+1/2)/2^n[} - 2^{-n/2-1/2}hn+1,2m)/2$$

$$1_{[(2m+1)/2^{n+1},(2m+3/2)/2^{n+1}[} = (2^{-n/2-1/2}hn+1,2m+1 + 1_{[(m+1/2)/2^n,(m+1)/2^n[})/2$$

$$1_{[(2m+3/2)/2^{n+1},(2m+2)/2^{n+1}[} = (1_{[(m+1/2)/2^n,(m+1)/2^n[} - 2^{-n/2-1/2}hn+1,2m+1)/2$$

et dans tous les cas l'hypothèse de récurrence implique que ces fonctions de bases sont dans $Vect(A)$.
Soit finalement $h \in Vect(A)^{\perp}$ alors $\int_0^1 h1_{[m/2^n,(m+1)/2^n[}dx = 0 = \int_{m/2^n}^{(m+1)/2^n} h(x)dx$ et donc pour tout $0 \leq k,l < 2^n$, par Chasles $\int_{k/2^n}^{l/2^n} h(x)dx = 0$ et donc par densité des nombres dyadique, pour tout $X \in [0,1[$, on a $\int_0^X h(x)dx = 0$. Par le théorème de différentiation de Lebesgue, cela implique que $h = 0$ p.p. donc $Vect(A)^{\perp} = \{0\}$ et donc $\overline{Vect(A)} = (Vect(A)^{\perp})^{\perp} = H$.