Université Claude Bernard | Mathématiques
M1G Analyse | 2016-2017

Contrôle continu 3
Lundi 5 décembre 2016

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (sur le cours : 5 points)

Soit H un espace de Hilbert.

1. Rappeler la définition d'une base orthonormale et énoncer le théorème des bases.
   On cherche dans les 2 questions suivantes à montrer les inégalités du théorème.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H. On pose $F_n = Vect(x_1, ..., x_n)$.
   Rappeler pourquoi F_n est fermé et donner (et montrer) une formule pour la projection orthogonale P_n sur F_n.
3. Montrer l'inégalité de Bessel.
4. Montrer l'égalité de Parseval dans le cas où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale.

Exercice 2 (4 points)

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des suites à valeurs réelles de carrés sommables avec sa norme usuelle $||.||_2$.

On définit

$$K = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in H : \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4|x_n|^2 < \infty\}$$

Et on le munit soit de la norme induite $(K, ||.||_2)$ soit de la norme

$$||x||_K = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4|x_n|^2}.$$

On le note alors $(K, ||.||_K)$

1. On pose $J : (K, ||.||_K) \to (H, ||.||_2)$ l'application définie par :
   $$J(x) = ((n+1)^2 x_n)_{n\geq 0}.$$
   Vérifier que J est une application linéaire continue surjective et isométrique.
2. Montrer que $(K, ||.||_K)$ est un espace de Hilbert.
3. Montrer que l'inclusion canonique $I : (K, ||.||_K) \to (H, ||.||_2)$ définie par $I(x) = x$ est continue.
4. Montrer que $L : (K, ||.||_2) \to (K, ||.||_K)$ définie par $L(x) = x$ admet un graphe fermé.
5. Est-ce que K est fermé dans H (avec la norme $||.||_2$, seule norme définie sur H dans l'exercice).

Exercice 3 (8 points)

Soit $H = L^2([0,1], Leb)$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carrés intégrables sur $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue. On rappelle le produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

On rappelle aussi que, par le cours, pour $f \in H$, la norme usuelle de $L^\infty([0,1], Leb)$ est donnée par la valeur :

$$||f||_\infty = \sup\left\{\int_0^1 f(t)g(t)dt : \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1, f \in H\right\} \in [0, +\infty].$$

Soit

$$S = \{f \in H, f(x) \in \{-1,1\} p.p.\} = \{f \in H, f(x)^2 = 1 \ p.p.\},$$

$$D = \{f \in H, \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1\}, \qquad C = \{f \in H, f(x) \in [-1,1] \ p.p.\}.$$

1. Montrer que
$$D = \{f \in H : \forall g \in S, \langle f, g\rangle \leq 1\}.$$
2. Montrer que
$$C = \{f \in H : \forall g \in D, \langle f, g\rangle \leq 1\}.$$
3. Montrer que C est un convexe fermé de H. En déduire que l'enveloppe convexe fermée vérifie $\overline{Conv(S)} \subset C$.
4. On veut montrer que $\overline{Conv(S)} = C$. On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in C$ tel que $x \notin \overline{Conv(S)}$. En utilisant, le théorème de Hahn-Banach géométrique, montrer qu'il existe $f \in D$ tel que $\langle f, x\rangle > 1$ et obtenir une contradiction.
5. Montrer que la projection sur le convexe fermé C est donnée par la formule
$$P_C(f) = \max(\min(f, 1), -1).$$

Exercice 4 (3 points + Bonus : 4 points)

Soit $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carrés intégrables pour la mesure gaussienne standard $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$, muni de la norme usuelle :

$$||f||_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx}.$$

Soit

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2/2})$$

(et donc $H_0(x) = 1$).

1. Montrer que pour $n \geq 1$, H_n est un polynôme de la forme :
$$H_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n!}} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$
2. Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormale de H.
3. [**Bonus : 4 points**] Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est aussi une base hilbertienne de H. (Indication : montrer d'abord que $F_t \in \overline{Vect(H_n, n \in \mathbb{N})}$ avec $F_t(x) = exp(itx)$)