Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2016-2017

Contrôle continu 3
Lundi 5 décembre 2016

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (sur le cours : 5 points)
(cf cours)

Exercice 2 (5 points)
Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des suites à valeurs réelles de carrés sommables avec sa norme usuelle $||.||_2$.

On définit
$$K = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in H : \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4|x_n|^2 < \infty\}$$
Et on le munit soir de la norme induite $(K, ||.||_2)$ soit de la norme
$$||x||_K = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4|x_n|^2}.$$
On le note alors $(K, ||.||_K)$

1. On pose $J : (K, ||.||_K) \to (H, ||.||_2)$ l'application définie par :
$$J(x) = ((n+1)^2 x_n)_{n\geq 0}.$$
Vérifier que J est une application linéaire continue surjective et isométrique.
J est évidemment linéaire (multiplication linéaire). On a $||J(x)||_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4|x_n|^2 = ||x||_K^2$. Donc J est isométrique donc continue. J est surjective car son inverse est $J^{-1}(x) = ((n+1)^{-2}x_n)_{n\geq 0}$. Et pour $x \in H$, $||J^{-1}(x)||_K = ||J(J^{-1}(x))||_2 = ||x||_2 < \infty$ donc on a bien $J^{-1} : H \to K$ définit sur tout H.
2. Comme J identifie $(K, ||.||_K)$ à H, c'est aussi un espace de Hilbert.
3. Montrons que l'inclusion canonique $I : (K, ||.||_K) \to (H, ||.||_2)$ définie par $I(x) = x$ est continue. I est linéaire et on a (vu $1 \leq (n+1)^4$) :
$$||I(x)||_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4|x_n|^2 = ||x||_K^2.$$
4. Montrer que $L : (K, ||.||_2) \to (K, ||.||_K)$ définie par $L(x) = x$ admet un graphe fermé. Soit $(x_n, L(x_n)) \to (x, y)$ une suite du graphe $\{(x, L(x)), x \in K\}$. On a $x_n \to x$ in $||.||_2$. et $x_n - y = I(L(x_n) - y) \to 0$ vu I continue. Donc $x_n \to y$ in $||.||_2$. Donc par unicité de la limite $x = y$ et le graphe de L est fermé. On peut aussi dire que le graphe de L est le symétrique de celui de $L^{-1} = I$ qui est fermé car I continue.

5. Montrons par l'absurde que K n'est pas fermé dans H. Sinon, il serait complet comme fermé d'un complet et L serait une application linéaire entre espace de Banach vu le 2 avec un graphe fermé donc serait continue. Or Soit $x_n = e_n/(n+1)$ on a $||x_n||_2 = 1/(n+1) \to 0$ mais $||L(x_n)||_K = (n+1) \to \infty$ donc $L(x_n)$ n'est pas borné, ddonc ne converge pas donc L n'est pas continue.

Exercice 3 (8 points)

Soit $H = L^2([0,1], Leb)$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carrés intégrables sur $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue. On rappelle le produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

On rappelle que, par le cours, pour $f \in H$, la norme usuelle de $L^\infty([0,1], Leb)$ est donnée par la valeur :

$$||f||_\infty = \sup\{\int_0^1 f(t)g(t)dt : \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1, f \in H\} \in [0, +\infty].$$

Soit

$$S = \{f \in H, f(x) \in \{-1,1\}p.p.\} = \{f \in H, f(x)^2 = 1 \ p.p.\},$$

$$D = \{f \in H, \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1\}$$

et

$$C = \{f \in H, f(x) \in [-1,1] \ p.p.\}$$

1. Montrons que
$$C = \{f \in H : \forall g \in D, \langle f, g\rangle \leq 1\}$$
Si $f \in C$ et $g \in D$ par Holder $\int_0^1 f(t)g(t)dt \leq ||g||_\infty \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1$ d'où $\subset$.
Réciproquement, soit $f \in H$ avec $\forall g \in D, \langle f, g\rangle \leq 1$. Or $||f||_\infty = \sup\{\int_0^1 f(t)g(t)dt : f \in D\} \leq 1$ ce qui conclut.
2. Montrons que C est un convexe fermé de H. C'est un convexe car c'est la boule unité pour $||.||_\infty$. Il est fermé car $C = \cap_{g\in D}\langle g, .\rangle^{-1}]-\infty, 1]$ est une intersection de fermés, comme image réciproque de fermés de $\mathbb{R}$ par une application linéaire continue. Comme $S \subset C$ C contient aussi le plus petit convexe fermé contenant S à savoir $\overline{Conv(S)} \subset C$.
3. Montrons que
$$D = \{f \in H : \forall g \in S, \langle f, g\rangle \leq 1\}.$$
On a déja noté que si $g \in S \subset C$, $f \in D$, $\langle f, g\rangle \leq 1$ donc $\subset$. Réciproquement, on prend $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)} 1_{|f(x)|\neq 0} + 1_{f(x)=0} \in S$ car g à valeur ± 1 $gf = |f|$ donc $\int |f| = \langle f, g\rangle \leq 1$ ce qui montre $f \in D$ et donc $\supset$.
4. On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in C$ tel que $x \notin \overline{Conv(S)}$. En utilisant, le théorème de Hahn-Banach géométrique, montrons qu'il existe $f \in D$ tel que $f(x) > 1$.
On sépare $\{x\}$ convexe compact disjoint de $\overline{Conv(S)}$ convexe fermé non-vie. On a donc $c \in \mathbb{R}, F \in H'$ avec :
$$F(x) > c > F(y), y \in \overline{Conv(S)}.$$

Vu $O = (1-1)/2 \in \overline{Conv(S)}$ on a $c > F(0) = 0$. Soit donc f le vecteur associé par le théorème de Riesz à F/c, on déduit :

$$\langle f, x \rangle > 1 > \langle f, y \rangle, y \in \overline{Conv(S)}.$$

Par la formule du 3 on déduit $f \in D$.
On obtient une contradiction car $x \in C$ et par 1 cela implique $1 < \langle f, x \rangle \leq 1$.

5. Montrons que la projection sur le convexe fermé C est donnée par la formule $P_C(f) = \max(\min(f,1),-1)$
D'abord, $||\max(\min(f,1),-1)||_\infty \leq 1$ donc $\max(\min(f,1),-1) \in C$. On vérifie la caractérisation, c'est à dire pour tout $g \in C$: $\langle f - \max(\min(f,1),-1), g - \max(\min(f,1),-1) \rangle \leq 0$. Or $f - \max(\min(f,1),-1) = (f-1)1_{\{f>1\}} + (1+f)1_{\{f<-1\}}$ donc

$$\begin{aligned}
&\langle f - \max(\min(f,1),-1), g - \max(\min(f,1),-1) \rangle \\
&= \int_0^1 ((f-1)1_{\{f>1\}} + (1+f)1_{\{f<-1\}})(g - \max(\min(f,1),-1)) \\
&= \int_0^1 (f-1)1_{\{f>1\}} g + \int_0^1 (1+f)1_{\{f<-1\}} g - \int_0^1 ((f-1)1_{\{f>1\}} - (1+f)1_{\{f<-1\}}) \\
&= \int_0^1 (f-1)1_{\{f>1\}}(g-1) + \int_0^1 (1+f)1_{\{f<-1\}}(g+1) \leq 0
\end{aligned}$$

car $(f-1)1_{\{f>1\}} \geq 0, (g-1) \leq 0$ et $(1+f)1_{\{f<-1\}} \leq 0, (g+1) \geq 0$ donc les 2 intégrales sont négatives.

Exercice 4 (3 points + Bonus : 3 points)

Soit $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carrés intégrables pour la mesure gaussienne standard $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$, muni de la norme usuelle :

$$||f||_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx}.$$

Soit

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{n!}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2/2})$$

(et donc $H_0(x) = 1$)

1. Montrons par récurrence que pour $n \geq 1$, H_n est un polynôme de la forme :

$$\sqrt{n!} H_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

En effet $H_1(x) = (-1)e^{x^2/2}(-xe^{-x^2/2}) = x$ et si on suppose l'hypothèse au rang n

$$\sqrt{(n+1)!} H_{n+1}(x) = -e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right) (e^{-x^2/2} \sqrt{n!} H_n(x))$$

Or $\left(\frac{d}{dx}\right)(e^{-x^2/2} x^k) = -x^{k+1} e^{-x^2/2} + k x^{k-1} e^{-x^2/2}$ donc l'hyp de rec donne

$$\sqrt{(n+1)!} H_{n+1}(x) = -e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right) (e^{-x^2/2}(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k)) = (x^{n+1} - n x^{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x^{k+1} - k x^{k-1})$$

qui a la forme souhaitée.

2. Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormale de H.
On calcule pour $m \geq n$:

$$\langle H_n, H_m\rangle = (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m!}} \int H_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^m (e^{-x^2/2})dx$$

En intégrant par partie

$$\int H_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^m (e^{-x^2/2})dx = [H_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} (e^{-x^2/2})]_{-\infty}^{\infty} - \int H_n'(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} (e^{-x^2/2})dx$$

le crochet est 0 vu que $P(x)e^{-x^2/2}$ pour P polynome tend vers 0 en $\pm\infty$.
Par induction si $m > n$

$$\langle H_n, H_m\rangle = (-1)^{m-n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m!}} \int H_n^{(n+1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-n+1} (e^{-x^2/2})dx = 0$$

et si m= n vu $H_n^{(n)}(x) = \sqrt{n!}$ en appliquant le 1.

$$\langle H_n, H_n\rangle = (-1)^{m-n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m!}} \int H_n^{(n)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-n} (e^{-x^2/2})dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2}dx = 1$$

comme voulue.

3. [**Bonus : 4 points**] Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est aussi une base hilbertienne de H.

$$F_t(x) = \exp(-t^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{\sqrt{n!}} H_n(x) \in \overline{Vect(H_n, n \in \mathbb{N})}.$$

et $F_t(x) = exp(itx)$ (série de taylor de $F_t(x)exp((t^2 - x^2)/2) = exp(-(it + x)^2/2)$ analytique en $t = 0$).
Donc si f orthogonale à tout H_n on a $u_\sigma(t) = \int f(x)exp(itx - x^2/2 - t^2/2\sigma) = 0$ On remarque que $f(x)exp(itx - x^2/2 - t^2/2\sigma) \in L^1(\mathbb{R}^2, Leb)$ donc par Fubini (et calcul de latransformée de Fourier d'une gaussienne) $0 = \int u_\sigma(t)exp(-itx)dt$ vaut :

$$\int dy \int dt f(y)exp(it(y - x) - y^2/2 - t^2/2\sigma) = \sqrt{2\pi\sigma} \int dy f(y)exp(\sigma(y - x)^2/2 - y^2/2)$$

Donc la convolution (par une gaussienne de vairance 1/n) est

$$0 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(y)exp(n(y - x)^2/2 - y^2/2) \to_{n\to\infty} f(x)exp(-x^2/2)pp$$

car $\rho_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}exp(nx^2/2)$ est une unité approchée (même condition qu'une suite régularisante sauf la condition de support qui est approchée la masse dans $[-\epsilon, \epsilon]$ tend vers 1).