Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2017-2018

Contrôle continu 3
Lundi 4 décembre 2017

Durée : 2H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Exercice 1 (sur le cours : 5 points)
Soit E un espace de Banach et H un espace de Hilbert.

1. Énoncer le lemme de Baire.
2. Énoncer le Théorème de Banach-Steinhaus.
3. Prouver le Théorème de Banach-Steinhaus.
4. Soit une suite $(x_n) \in H, x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$, en déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

Exercice 2 (8 points)
Soit H un espace de Hilbert. $B(H)$ est muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$.

Soit $T \in B(H)$ une application linéaire continue avec $|||T||| \leq 1$.

On rappelle que T^* est son adjoint et $T^n = T \circ \cdot \circ T$ la puissance de composition n-ième.
On pose

$$T_n = \frac{1 + T + \cdots + T^n}{n+1}.$$

1. Montrer que $Tx = x$ si et seulement si $\langle Tx, x\rangle = ||x||^2$.
2. En déduire que $Ker(I - T) = Ker(I - T^*)$.
3. Montrer la somme directe :

$$H = Ker(I - T) \oplus \overline{Im(I - T)}.$$

4. Soit $x \in Ker(I - T)$. Que vaut $T^n x$? Que vaut $T_n x$?
5. Soit $x \in \overline{Im(I - T)}$. Montrer que $T_n x \to 0$.
6. Soit $x \in H$ quelconque et soit P la projection orthogonale sur $Ker(I - T)$, montrer que $T_n(x) \to P(x)$.
7. Si $|||T||| < 1$. Montrer que $|||T_n - P||| \to 0$.
8. **On spécifie à partir de maintenant au cas** $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $T((x_n)_{n\geq 0}) = (y_n)_{n\geq 0}$ avec $y_0 = 0, y_{n+1} = x_n, n \geq 0$. Montrer que $T \in B(H)$ et $|||T||| = 1$.
9. Montrer que $Ker(I - T) = \{0\}$.
10. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} |||T_n||| = 1$.
(Indication : on pourra estimer $||T_n(e_\lambda)||_2$ avec $e_\lambda = (\lambda^n)_{n\geq 0}, \lambda \in]0, 1[$.)

Exercice 3 (7 points)

Soit $H = L^2([-1,1], Leb)$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de Lebesgue, muni de la norme usuelle :

$$||f||_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx}.$$

Soit

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x^2-1)^n)$$

(et donc $P_0(x) = 1$).

1. Vérifier que pour $n \geq 1$, P_n est un polynôme de la forme :

$$P_n(x) = C_{2n}^n \frac{x^n}{2^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^n x^k$$

avec les $a_k^n \in \mathbb{R}$ et C_{2n}^n le coefficient binomial usuel.

2. Vérifier que $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$.
3. Montrer que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale de H.
4. Montrer que $\frac{d}{dx}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = (2n+1)P_n(x)$.
5. En déduire que $||\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n||_2 = 1$
6. Montrer que $(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.
7. En déduire, une formule explicite pour la projection orthogonale sur $R_n \subset H$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.