Université Claude Bernard | Mathématiques
M1G Analyse | 2017-2018

Conrrection du Contrôle continu 3

Exercice 1 (sur le cours : 5 points)

Soit E un espace de Banach et H un espace de Hilbert. (cf. cours pour les trois premiers points)

1. Énoncer le lemme de Baire.
2. Énoncer le Théorème de Banach-Steinhaus.
3. Prouver le Théorème de Banach-Steinhaus.
4. Soit une suite $(x_n) \in H, x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$, en déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
   COmme par le théorème de Riesz tout élément $\phi \in H'$ est représenté par un y, l'hypothèse se lit $\phi(x_n) \to \phi(x)$ pour tout $\phi \in H'$ (c'est une convergence faible, on a vu en cours que BS implique la bornitude, c'est ce qu'on veut revoir ensuite). En particulier chaque suite $(\phi(x_n) = J(x_n)(\phi))$ est bornée (avec $J : H \to H''$ l'application canonique). DOnc $J(x_n) \in L(H', \mathbb{K})$ est une famille ponctuellement bornée d'application linéaire continue entre espace de Banach, $H', \mathbb{K}$ donc par Banach-Steinhauss, $(|||J(x_n)|||)_{n\geq 0}$ est bornée. Or J est une isométrie donc (x_n) est aussi une suite bornée.

Exercice 2 (8 points)

Soit H un espace de Hilbert . Soit $T \in B(H)$ avec $||T|| \leq 1$. On rappelle que T^* est son adjoint et $T^n = T \circ \cdot \circ T$ la puissance de composition. $B(H)$ est muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$.

On pose

$$T_n = \frac{1 + T + \cdots + T^n}{n+1}.$$

1. Montrons que $Tx = x$ si et seulement si $\langle Tx, x\rangle = ||x||^2$. On peut supposer $x \neq 0$ sinon les deux sont clairement vrais. L'implication directe est évidente, réciproquement vu $\langle Tx, x\rangle \leq ||Tx||||x|| \leq ||T||||x||^2 = ||x||^2$ par Cauchy-Schwartz et définition de la norme, on déduit qu'on est dans le cas d'égalité de CS d'où $Tx = \lambda x$ et donc vu l'égalité $\overline{\lambda}||x||^2 = ||x||^2$ on a $\lambda = 1$.
2. Or $x \in Ker(I - T)$ si et seulement si $Tx = x$ si et seulement si (par 1) $\langle Tx, x\rangle = ||x||^2 = \langle x, T^*x\rangle = \langle T^*x, x\rangle$ par réalité de l'expression si et seulement si (par 1 vu $||T|| = ||T^*|| \leq 1$) $T^*x = x$ si et seulement si $x \in Ker(I - T^*)$ Soit donc $Ker(I - T) = Ker(I - T^*)$.
3. Or par le cours $Ker(I - T^*)^\perp = \overline{Im(I - T)}$ donc on a la somme direct orthogonale :
   $$H = Ker(I - T) \oplus Ker(I - T)^\perp = Ker(I - T) \oplus Ker(I - T^*)^\perp = Ker(I - T) \oplus \overline{Im(I - T)}.$$
4. Si $x \in Ker(I - T)$ $T(x) = x$ donc par rec $T^n x = x$ et donc $T_n x = \frac{(n+1)x}{n+1} = x$.
5. Soit $x \in \overline{Im(I - T)}$. Pour Montrer que $T_n x \to 0$, on prend $\epsilon > 0$ $y \in H$ tel que $||y - T(y) - x|| \leq \epsilon$ par densité donc vu $||T_n|| \leq 1$ par inégalité triangulaire ;$||T_n x - T_n(y - T(y))|| \leq \epsilon$ Or $T_n(1 - T) = (1 - T^{n+1})/(n+1)$ par la somme géométrique donc
   $$||T_n(y - T(y))|| \leq (||y|| + ||T^{n+1}(y)||)/(n+1) \leq 2||y||/(n+1)$$
   d'où $\limsup ||T_n x|| \leq \limsup \epsilon + 2||y||/(n+1) = \epsilon \to_{\epsilon \to 0} 0$ donc $\limsup ||T_n x|| = 0$.

6. Soit $x \in H$ quelconque on décompose $x = y + z$ dans la décomposition orthogonale du 3 et soit P la projection orthogonale sur $Ker(I-T)$, on a $T_n(x) = T_n(y)+T_n(z) = y+T_n(z) \to y = P(x)$ par la question précédente (et continuité de la somme, et caractérisation de P comme projection selon la somme directe orthogonale).
7. Si $||T|| < 1$. Alors la série $\sum ||T||^n$ converge donc $\sum T^n$ converge normalement de sorte que $(1-T)^{-1} \in B(H)$ en particulier $P = 0$. Donc que $|||T_n - P||| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ||T||^n \to 0$ par somme de Césaro vu $||T||^n \to 0$.
8. **On spécifie à partir de maintenant au cas** $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $T((x_n)_{n\geq 0}) = (y_n)_{n\geq 0}$ avec $y_0 = 0, y_{n+1} = x_n$. Montrons que $T \in B(H)$ et $|||T|||) = 1$. En fait on a $||T((x_n)_{n\geq 0})||^2 = \sum |y_n|^2 = \sum |x_n|^2 = ||(x_n)_{n\geq 0}||^2$ donc T est une isométrie de sorte que $|||T||| \leq 1$ N'importe quel vecteur de base donne $||T(e_1)|| = ||e_1||$ d'où l'égalité.
9. Montrons que $Ker(I-T) = \{0\}$. Si $Tx = x$ alors $y = x$ donc $x_0 = 0$ et $x_i = y_i = x_{i-1}$ donc x est constante et $x = 0$.
10. Montrons que $\limsup_{n\to\infty} |||T_n||| = 1$ en fait $|||T_n||| = 1$ pour tout n. Calculons $||T_n(e_\lambda)||_2^2$ avec $e_\lambda = (\lambda^n)_{n\geq 0}, \lambda \in]0,1[$. Noter que $T_n(e_k) = \frac{e_k + ... + e_{k+n}}{n+1}$
On a $T_n(e_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{e_k+...+e_{k+n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \sum_{l=0}^{n} e_{k+l}$. Donc on peut calculer tous les produits scalaires si $p \geq n$ $\langle T_n(e_\lambda), e_p\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \sum_{l=0}^{n}\langle e_{k+l}, e_p\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\sum_{l=0}^{n} 1_{k=p-l} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\lambda^{p-l} = \frac{\lambda^{p-n}(1+\lambda+...+\lambda^n)}{n+1}$. Donc par Parseval
$$||T_n(e_\lambda)||_2^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty} |\langle T_n(e_\lambda), e_p\rangle|^2 = \frac{(1+\lambda+...+\lambda^n)^2}{(n+1)^2}\sum_{k=n}^{\infty}\lambda^{2k} = \frac{(1+\lambda+...+\lambda^n)^2}{(n+1)^2}||e_\lambda||_2^2$$
Donc $|||T_n||| \geq \frac{(1+\lambda+...+\lambda^n)}{(n+1)} \to_{\lambda\to 1} 1$.

Exercice 3 (7 points)

Soit $H = L^2([-1,1], Leb)$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de Lebeshue, muni de la norme usuelle :
$$||f||_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx}.$$
Soit
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x^2-1)^n)$$
(et donc $P_0(x) = 1$).

1. Montrons que pour $n \geq 1$, P_n est un polynôme de la forme :
$$P_n(x) = C_{2n}^n \frac{x^n}{2^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^n x^k$$
avec les $a_k^n \in \mathbb{R}$ et C_{2n}^n le coefficient binomial usuel. Comme $(x^2-1)^n$ est de degré 2n à coefficient réel, en dérivant n fois P_n est de degré n, il suffit de calculer le coefficient dominant qui est
$$\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{2n}) = \frac{(2n)...(n+1)}{2^n n!}x^n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$$
comme voulu.

2. Vérifions que $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$.
   $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ donc en appliquant la formule de Leibniz, la dérivée donne

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x-1)^n(x+1)^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k ((x-1)^n) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} ((x+1)^n)$$

   Après évaluation en 1, tous les termes s'annulent sauf $k = n$, et en -1 tous les termes s'annulent sauf $k = 0$ (moins de n dérivée à $(x-a)^n$ implique que a est encore racine).
   Donc

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x-1)^n)((1+1)^n) = 1$$

   et

$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x+1)^n)((-1-1)^n) = (-1)^n$$

3. Montrons que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale de H.
   Il suffit de voir pour $m > n$ $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$
   Remarquons que $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ donc les dérivées $\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^2-1)^n k < n$ ont encore des racines en $1, -1$
   Or on peut intégrer par partie et tous les crochets successifs s'annulent pour la raison précédente de sorte qu'une récurrence facile donne :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^{n+m} m!n!}$$
$$\left([\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} [(x^2-1)^m] \left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x^2-1)^n)]_{-1}^1 - \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} [(x^2-1)^m] \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} [(x^2-1)^n]dx\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+m} m!n!} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-2} (x^2-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+2} [(x^2-1)^n]dx$$
$$= \frac{1}{2^{n+m} m!n!}(-1)^m \int_{-1}^{1} (x^2-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} [(x^2-1)^n]dx = 0$$

   l'annulation venant du nombre $m + n > 2n$ de dérivées plus grand que le degré.

4. Montrons que $\frac{d}{dx}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = (2n+1)P_n(x)$.
   D'abord, voyons que les deux côtés sont orthogonaux aux $P_k(x), k < n$, on vient de le voir pour le membre de droite, mais par IPP,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}(P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x))P_k(x)dx = [(P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x))P_k(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^{1} (P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x))P_k'(x)dx$$

   mais P_k' est de degré $k-1 < n-1$ donc appartient à $Vect(P_l(x), l < n-1)$ par un résultat classique sur les bases d'espaces de polynômes. Ainsi, l'orthogonalité précédente implique que l'intégrale de droite est nulle. Mais $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$ par la question 2 donc $(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))$ s'annule en 1 et -1 et le crochet s'annule aussi.

Comme pour des raisons de degrés $Q_n(x) = \frac{d}{dx}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))$ est de degré n donc dans $Vect(P_l(x), l < n)$, dont $(P_l/||P_l||)_{l\leq n}$ est une bon on déduit du théorème des bases

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} \langle Q_k, P_k/||P_k||^2\rangle P_k = \lambda_n P_n$$

Il reste donc a calculer λ_n. Mais pour cela il suffit de comparer les coefficients dominants et on a par le 1 :

$$\lambda_n C_{2n}^{n} \frac{x^n}{2^n} = \frac{d}{dx}(C_{2n+2}^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}})$$

soit $\lambda_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)^2(n!)^2}$ ou encore $\lambda_n = 2n+1$ comme voulu.

5. Déduisons en que $||P_n||_2^2 = \frac{2}{2n+1}$

$$\begin{aligned}\langle P_n, P_n\rangle &= \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))P_n(x)dx \\ &= \frac{1}{2n+1}[(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))P_n(x)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2n+1}\langle P_{n+1} - P_{n-1}, P_n'\rangle \\ &= -\frac{1}{2n+1}\langle P_{n+1} - P_{n-1}, P_n'\rangle\end{aligned}$$

vu l'annulation du crochet comme à la question précédente.
Or pour raison de degré par 3, $\langle P_{n+1}, P_n'\rangle = 0$ donc cela vaut $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{1}{2n+1}\langle P_{n-1}, P_n'\rangle = \frac{1}{2n+1}\langle P_{n-1}, (P_n - P_{n-2})'\rangle = \frac{2n-1}{2n+1}||P_{n-1}||_2^2$. Donc $(2n+1)||P_n||_2^2$ est constant
Or $||P_0||_2^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2$ d'où le résultat.

6. On vient de voir que $(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormale par les questions 3 et 5, qui engendre les polynômes, il suffit de rappeler que les polynômes sont denses dans H pour conclure que c'est une base hilbertienne de H. Mais Par le théorème de Weierstrass, les polynômes sont dense dans $C^0([-1,1])$ vu $[-1,1]$ compact, pour la norme $||.||_\infty$ donc a fortiori pour la norme plus faible $||.||_2$ et $C^0([-1,1])$ est dense dans H par le chapitre 1.

7. Le cours donne une formule explicite pour la projection orthogonale sur $R_n = Vect(P_0, ..., P_n) \subset H$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. C'est

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}\langle P_k, f\rangle P_k$$