Université Claude Bernard — Mathématiques

M1G Analyse — 2015-2016

Examen du Jeudi 7 janvier 2016
Durée : 3H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours : (3 points)
Enoncer et prouver le théorème de Banach-Steinhauss (aussi dit théorème de la borne uniforme, pour la preuve ; on utilisera le lemme de Baire SANS le démontrer).

Problème 1 (8 points + Bonus : 2 points) Soit $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace de Hilbert des suites complexes $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indicés par les entiers relatifs et de modules au carré sommable. Soit $K = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \lambda)$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeur complexe de module au carré intégrables pour la mesure de Lebesgue λ. On munit ces espaces des normes usuelles :

$$||c||^2 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \lim_{K\to+\infty} \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2,\ si\ c \in H \qquad ||f||^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x),\ si\ f \in K.$$

On note $i = \sqrt{-1}$ le nombre complexe. On pose $e_n(x) = exp(inx), n \in \mathbb{Z}$ de sorte que $e_n \in K$. On rappelle que l'on note $B(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H dans H.

1. Donner les produits scalaires hermitiens associés aux normes de H et K.
2. Montrer que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormale. (en fait c'est une base orthonormale mais on aura pas besoin de ce résultat que l'on ne demande pas de démontrer). En déduire que $V : H \to K$ l'application linéaire suivante est une isométrie
$$V(c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n.$$
3. Soit $U : H \to H$ définie par $U(c) = d$ la suite telle que $d_{n+1} = c_n$. Montrer que U est une isométrie.
4. Calculer $U^* \in B(H)$ et en déduire que $UU^* = U^*U = Id$ (c'est-à-dire que U est un unitaire).
5. **(Bonus : 1 point)** En déduire que U n'est pas un opérateur compact.
6. Soit $X = U + U^* \in B(H)$. Montrer que la norme subordonnée (ou d'opérateur) est $|||X||| = 2$.
7. En déduire que $X + 2 + \epsilon^2$ est inversible pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$.
8. Vérifier que, pour V définie à la question 2 et pour tout $h \in H$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[V(Uh)](x) = e^{ix}[V(h)](x)$.
9. Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, comme U, U^* commutent, on peut définir $P(U, U^*)$. Déduire de la question précédente que
$$||P(U, U^*)V^{-1}(e_0)|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{ix}, e^{-ix})|^2 d\lambda(x).$$
10. Montrer que pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$, $(U + U^* + i\epsilon)$ est inversible et
$$||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}(e_0)|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4cos^2(x) + \epsilon^2} d\lambda(x).$$

11. En déduire que
$$||(U+U^*+i\epsilon)^{-1}V^{-1}(e_0)|| \to_{\epsilon\to 0} +\infty.$$
Conclure que $0 \in \sigma(X)$ (cest-à-dire 0 est dans le spectre de X).
12. **(Bonus : 1 point)** Montrer que 0 n'est pas valeur propre de X.

Problème 2 (9 points + Bonus : 3 points)

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $2 < p < \infty$, q l'exposant conjugué de p tel que $1/p + 1/q = 1$. On considère $E = L^p([0,1], \lambda)$ l'espace de Banach des (classes d'équivalence à égalité presque partout près de) fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de puissance p-ème intégrable avec sa norme usuelle :
$$||f||_p^p = \int_{[0,1]} |f(x)|^p d\lambda(x).$$
On définit les ensembles
$$C = \{g \in E \ : \ g(x) \geq 0 \ p.p.\} \quad et \quad D = \{f \in L^q([0,1], \lambda) \ : \ f(x) \geq 0 \ p.p.\}.$$

1. Vérifier que :
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(||f||_p^p + ||g||_p^p).$$
2. Montrer que $||f||_2 = \sqrt{\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x)}$ est une norme sur E qui n'est pas équivalent à $||.||_p$.
3. En déduire que $(E, ||.||_2)$ n'est pas complet.
4. Rappeler le théorème de représentation de Riesz donnant le dual de $(E, ||.||_p)$.
On munit à présent toujours E de cette norme $||.||_p$.
5. Montrer que C est convexe et que l'on a la description alternative :
$$C = \{g \in E : \forall f \in D : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \geq 0\}.$$
En déduire que C est un convexe fermé de E.
6. Montrer en utilisant un théorème du cours que pour tout $g \in E$, il existe un $y \in C$ atteignant le minimum de $F_p(c) = ||g-c||_p^p$ sur C, c'est-à-dire :
$$||g-y||_p^p = \inf_{c\in C} ||g-c||_p^p.$$
7. En utilisant le 1. (ou un résultat du cours), vérifier l'unicité du y dont on a montré l'existence à la question précédente. On note à présent cet unique y par $P_C(g)$.
8. Soit $h \in C$, on rappelle que la définition du cône normal
$$N_C(h) := \{f \in L^q([0,1], \lambda) : \forall H \in C \int_{[0,1]} f(x)(H(x) - h(x))d\lambda(x) \leq 0\}$$
$N_C(h)$ est-il faiblement fermé dans $L^q([0,1], \lambda)$? $N_C(h)$ est-il faiblement compact dans $L^q([0,1], \lambda)$?
9. Soit maintenant $g \in E$. Montrer que, la fonction définie à la question 6, F_p est différentiable en $h = g1_{\{g\geq 0\}} \in C$ et que la différentielle en h dans la direction $f \in E$ est donnée par
$$dF_p(h).f = \int_{[0,1]} p|g(x) - h(x)|^{p-1} f(x) d\lambda(x).$$
10. Montrer que $P_C(g) = g1_{\{g\geq 0\}}$.
11. **(Bonus : 3 points)** Montrer que P_C est continue.