Université Claude Bernard — Mathématiques
M1G Analyse — 2015-2016

Examen du Jeudi 7 janvier 2016
Durée : 3H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Question de Cours : (3 points)
Enoncer et prouver le théorème de Banach-Steinhauss (aussi dit théorème de la borne uniforme, pour la preuve ; on utilisera le lemme de Baire SANS le démontrer).

Problème 1 (9 points + Bonus : 2 points) Soit $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace de Hilbert des suites complexes $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indicés par les entiers relatifs et de modules au carré sommable. Soit $K = L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \lambda)$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeur complexe de module au carré intégrables pour la mesure de Lebesgue λ. On munit ces espaces des normes usuelles :

$$||c||^2 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \lim_{K\to+\infty} \sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2, \ si\ c \in H \qquad ||f||^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x), \ si\ f \in K.$$

On note $i = \sqrt{-1}$ le nombre complexe. On pose $e_n(x) = exp(inx), n \in \mathbb{Z}$ de sorte que $e_n \in K$. On rappelle que l'on note $B(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H dans H.

1. Donner les produits scalaires hermitiens associés aux normes de H et K.

$$\langle c, d\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\lambda(x)$$

Ils sont bien linéaires en la deuxième variable, hermitiennement symétrique donc il suffit que la norme associé soit la bonne, ce qui est le cas, pour que l'unicité implique que ce sont bien les produits scalaires cherchés.

2. Vérifions que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormale.
Comme $|e_n(x)| = 1$, on a $||e_n||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1dx = 1$ De plus, $\overline{e_m}e_n = e_{n-m}$ et si $n \neq 0$ par 2π périodicité des e_n :

$$\int_0^{2\pi} e_n(x)dx = [\frac{e_n(x)}{in}]_0^{2\pi} = 0$$

donc si $n \neq m$,

$$\langle e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e_m(x)} e_n(x)d\lambda(x) = 0$$

Déduisons que $V : H \to K$ l'application linéaire suivante est une isométrie

$$V(c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n.$$

C'est une conséquence du théorème des bases car e_n forme une base de $\overline{Vect(e_n, n \in \mathbb{Z})}$, le théorème énonce exactement l'isométrie voulue.
On peut aussi utiliser de façon équivalente l'identité de Parseval (en utilisant la même propriété d'être une base de l'espace engendrée ou en passant à la limite par continuité de la norme dans le cas somme finie) :

$$||V(c)||^2 = ||\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n||^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = ||c||^2$$

3. Soit $U : H \to H$ définie par $U(c) = d$ la suite telle que $d_{n+1} = c_n$. Pour montrer que U est une isométrie, il suffit de noter que

$$||U(c)||^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_{n+1}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = ||c||^2.$$

4. De la question précédente, on a $U \in B(H)$ on peut donc calculer $U^* \in B(H)$. L'unitarité donne la réponse, il faut montrer que $U^* = U^{-1}$ soit $U^*(d) = c$ avec $d_{n+1} = c_n$.
Or, soit $f \in H$, en faisant le changement d'indice $n = m - 1$, on a

$$\langle U(f), d\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{f_{m-1}} d_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f_n} d_{n+1} = \langle f, c\rangle,$$

ce qui montre $U^* = U^{-1}$.
5. **(Bonus : 1 point)** Si U était un opérateur compact, par le cours comme les opérateurs compacts forment un idéal, $UU^* = Id$ serait compact donc la boule unité de H serait compact, donc par le théorème de compacité de Riesz, H serait de dimension finie. Ce n'est pas le cas car on une famille orthonormale (donc libre) infinie.
6. Soit $X = U + U^* \in B(H)$. Calculons une borne sur la norme subordonnée (ou d'opérateur) $|||X|||$.
D'abord, comme U, U^* isométrique ce sont des contractions donc $|||U||| \leq 1, |||U^*||| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire $|||X||| \leq 2$.
Déduisons que $X + 2 + \epsilon^2$ est inversible pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$.
D'après le cours $\sigma(X) \subset [-2, 2]$ car X autoadjoint et $|||X||| \leq 2$ donc comme $2 + \epsilon^2 \not\in [-2, 2]$, on obtient le résultat.
En fait, on peut aussi utilise l'autre preuve directe, comme

$$||X/(2 + \epsilon^2)|| \leq 2/(2 + \epsilon^2) < 1$$

la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(X/(2 + \epsilon^2))^k$ est normalement convergente car $\sum_{k=0}^{\infty} |||(X/(2 + \epsilon^2))^k||| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |||(X/(2+\epsilon^2))|||^k < \infty$. Comme $B(H)$ est un espace de Banach, $Y = \sum_{k=0}^{\infty}(X/(2+\epsilon^2))^k$ existe et

$$Y(1+(X/(2+\epsilon^2))) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K}(-1)^k(X/(2+\epsilon^2))^k(1+(X/(2+\epsilon^2))) = \lim_{K\to\infty} 1+(-1)^K(X/(2+\epsilon^2))^{K+1} = 1$$

donc $Y = (1 + (X/(2 + \epsilon^2)))^{-1}$ et $(2 + \epsilon^2)Y = (X + 2 + \epsilon^2)^{-1}$.

7. Vérifions que, pour V définie à la question 2 et pour tout $h \in H$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[V(Uh)](x) = e^{ix}[V(h)](x)$

$$V(Uc)(x) = V(d)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{n+1}e_{n+1}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(x)e_1(x) = e_1(x)V(c)(x)$$

8. Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, comme U, U^* commutent, on peut définir $P(U,U^*)$. De plus la relation de la question précédente s'écrit $VU = uV$ avec l'opérateur de multiplication par e^{ix}, $(uf)(x) = e^{ix}f(x)$ dont l'adjoint est par le cours u^* $(u^*f)(x) = e^{-ix}f(x)$. En raisonnant comme à la question précédente, on a $VU^* = u^*V$. Par somme et produit on obtient $VP(U,U^*) = P(u,u^*)V$
On peut donc calculer

$$||P(U,U^*)V^{-1}e_0|| = ||V(P(U,U^*)V^{-1}e_0)|| = ||(P(e^{ix}, e^{-ix})V(V^{-1}e_0))|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{ix}, e^{-ix})|^2 d\lambda(x),$$

car $V(V^{-1}e_0) = 1$.

9. Montrons que pour $\epsilon \in \mathbb{R}^*$, $(U + U^* + i\epsilon)$ est inversible (on peut aussi utiliser le caours car $\sigma(U + U^*) \subset \mathbb{R}$). En effet $(U + U^* + i\epsilon)(U + U^* - i\epsilon) = U^2 + (U^*)^2 + 2 + \epsilon^2$. Or $||U^2 + (U^*)^2|| \leq 2$ donc comme au 7 ; $U^2 + (U^*)^2 + 2 + \epsilon^2$ est inversible et comme en TD $(U + U^* - i\epsilon)(U^2 + (U^*)^2 + 2 + \epsilon^2)^{-1}$ est l'inverse de $(U + U^* + i\epsilon)$ pour $\epsilon \neq 0$.
Méthode 1 :$(U + U^* + i\epsilon)^{-1} = f(X)$ avec une fonction f $(f(x) = (x + i\epsilon)^{-1})$ continue sur $[-2, 2]$ (même sur $\mathbb{R}$) qui contient le spectre de $X = X^*$ donc, par le théorème de Weierstrass on a P_n polynômes $||P_n - f||_{C^0([-2,2])} \to 0$, et donc par le théorème du calcul fonctionnel (ou le théorème spectral) on $||P_n(X) - f(X)|| \leq ||P_n - f||_{C^0([-2,2])} \to 0$.
Finalement on a vu

$$||f(X)V^{-1}e_0|| = \lim_{n\to\infty} ||P_n(X)V^{-1}e_0|| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(e^{ix}+e^{-ix})|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(2cos(x))|^2 d\lambda(x)$$

Donc

$$||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}e_0|| = ||f(X)V^{-1}e_0|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4cos^2(x) + \epsilon^2} d\lambda(x).$$

Méthode 2 : comme pour $h = (U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}(e_0)$ et par 7 : $e_0 = V((U + U^* + i\epsilon)h) = (u+u^*+i\epsilon)V((U+U^*+i\epsilon)^{-1}e_0)$ on déduit $V((U+U^*+i\epsilon)^{-1}e_0 = (u+u^*+i\epsilon)^{-1} = (2cos(x)+i\epsilon)^{-1}$ ce qui conclut.

10. Comme $\frac{1}{4cos^2(x)+\epsilon^2} \to \frac{1}{4cos^2(x)}$ croit pour $\epsilon \to 0$, on obtient par le théorème de convergence monotone que :

$$||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}e_0|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4cos^2(x) + \epsilon^2} d\lambda(x) \to_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4cos^2(x)} d\lambda(x).$$

Or $\cos(\pi/2 + x)^{-2} \sim_{x\to 0} x^{-2}$ n'est pas intégrable donc on a obtenu

$$||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}e_0|| \to_{\epsilon\to 0} +\infty.$$

Or si on avait $0 \notin \sigma(X)$, on aurait par continuité de $(U + U^* + z)^{-1}$ sur le $\rho(X)$ d'où

$$||(U + U^* + i\epsilon)^{-1}V^{-1}e_0|| \to ||(U + U^*)^{-1}V^{-1}e_0|| \leq |||(U + U^*)^{-1}|||.$$

11. Soit $X = U + U^* \in B(H)$. Calculons la norme subordonnée (ou d'opérateur) $|||X|||$.
Méthode 1 : D'abord, comme U, U^* isométrique ce sont des contractions donc $|||U||| \leq 1, |||U^*||| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire $|||X||| \leq 2$.
De plus, $X(e_1) = e_0 + e_2$ donc $||X(e_1)||^2 = 2$ donc $|||X||| \geq \sqrt{2}$.
SOit pour $\rho \in]0, 1[$ $f_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e_{2k+1}$ on a $||f_\rho||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} = \frac{1}{1-\rho^2}$.
On a
$$X(f_\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (e_{2k} + e_{2k+2}) = e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k + \rho^{k-1}) e_{2k}$$
Donc
$$||X(f_\rho)||^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho + 1)^2 \rho^{2(k-1)} = 1 + \frac{(\rho+1)^2}{1-\rho^2}$$
DOnc on obtient
$$\frac{||X(f_\rho)||^2}{||f_\rho||^2} = 1 - \rho^2 + (\rho+1)^2 = 2 + 2\rho$$
d'où $|||X|||^2 \geq 2+2\rho \to_{\rho \to 1} 4$, on obtient donc $|||X||| \geq 2$ puis avec l'autre inégalité $|||X||| = 2$.
Méthode 2 : Montrer que $2 \in \sigma(X)$ par la méthode du 10.

12. **(Bonus : 1 point)** Montrons que 0 n'est pas valeur propre de X.
Supposons par l'absurde que c soit un vecteur propre, alors $(Xc)_{n+1} = c_{n+2} + c_n = 0$ donc $c_{n+2} = -c_n$ donc $c_{2n} = (-1)^n c_0$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_0|^2 = \infty$ donc ceci contredit $c \in H$.

Problème 2 (8 points + Bonus : 4 points)

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et $2 < p < \infty$, q l'exposant conjugué de p tel que $1/p + 1/q = 1$. On considère $E = L^p([0, 1], \lambda)$ l'espace de Banach des (classes d'équivalence à égalité presque partout près de) fonctions mesurables $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de puissance p-ème intégrable avec sa norme usuelle :
$$||f||_p^p = \int_{[0,1]} |f(x)|^p d\lambda(x).$$
On définit les ensembles
$$C = \{g \in E \ : \ g(x) \geq 0 \ p.p.\} \ \ et \ \ D = \{f \in L^q([0, 1], \lambda) \ : \ g(x) \geq 0 \ p.p.\}.$$

1. Vérifions que :
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(||f||_p^p + ||g||_p^p).$$
(cf cours lemme 93)

2. $||f||_2 = \sqrt{\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x)}$ est une norme sur E par restriction de la norme Hilbertienne sur L^2 (la preuve explicite utilise Cauchy-Schwarz sur le double produit...). Montrons qu'elle n'est pas équivalente à $||.||_p$. En effet si $f_n = 1_{[0;1/n]}$ on a $||f_n||_2 = 1/\sqrt{n}$ et $||f_n||_p = 1/n^{1/p}$. Comme $p > 2$ on a
$$||f_n||_p / ||f_n||_2 = n^{1/2 - 1/p} \to_{n \to \infty} +\infty.$$
DOnc les normes ne sont pas équivalentes

3. Si $(E, ||.||_2)$ était complet, comme $(E, ||.||_p)$ est complet et $||f||_2 \leq ||f||_p$ donc $id : (E, ||.||_p) \to (E, ||.||_2)$ est continue, on pourrait appliquer le théorème de l'application ouverte (comme id est une bijection) on déduirait que son inverse $id : (E, ||.||_2) \to (E, ||.||_p)$ serait continue ce qui contredirait la non-équivalence des normes de la question précédente.
4. Rappeler le théorème de représentation de Riesz donnant le dual de $(E, ||.||_p)$. (cf cours le dual est isométrique à $(L^q([0,1], \lambda), ||.||_q)$)
   On munit à présent toujours E de cette norme $||.||_p$.
5. C est convexe : si A_f est l'ensemble de mesure 1 ou f positive idem A_g, pour $f, g \in C$, $A_f \cap A_g$ et encore de mesure 1 et pour $t \in [0,1]$, $tf + (1-t)g$ est positive sur $A_f \cap A_g$ donc p.p.
   Montrons que l'on a la description alternative :
   $$C = \{g \in E : \forall f \in D : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \geq 0\}.$$
   si $g \in C$ alors pour $g \geq 0$ on a $fg \geq 0$ donc $f \in \{g \in E : \forall f \in D : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \geq 0\}$. Réciproquement, on prend $g = 1_{\{f<-1/n\}} \in L^q$ Or $\int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \leq 0$ car $fg \leq 0$ dnc si $f \in \{g \in E : \forall f \in D : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \geq 0\}$ on aurait
   $$-\lambda(f < -1/n)/n \geq \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) = 0$$
   (car $fg \leq -g/n$) donc $\lambda(f < -1/n) = 0$ et donc en prenant l'union croissante dénombrable $\lambda(f < 0) = 0$ donc $f \geq 0$ pp soit $f \in C$.
   On déduit que C est un convexe fermé de E par intersection des fermés $T(g)^{-1}([0, \infty[)$ avec $T(g)$ la forme linéaire continue canonique de la dualité vu au 4. $T(g)(f) = \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x)$.
6. Montrons en utilisant un théorème du cours que pour tout $g \in E$, il existe un $y \in C$ atteignant le minimum de $F_p(c) = ||g - c||_p^p$ sur C, c'est-à-dire :
   $$||g - y||_p^p = \inf_{c \in C} ||g - c||_p^p.$$
   Par le cours (th de Riesz rappelé plus haut) E est réflexif. De plus F_p est continue (par composition de la puissance p-ième et de la norme qui sont continues). Par le 1, F_p est convexe car $F_p((f+g)/2) \leq (F_p(f) + F_p(g))/2$ et par l'exercice de TD, cela suffit à montrer la convexité pour une fonction s.c.i. (on peut aussi composer la norme convexe à $x \mapsto x^p$ convexe, cela évite d'oublier l'hypothèse s.c.i. du résultat de TD)
   Enfin $F_p(x) \geq (||x|| - ||g||)^p \to_{||x|| \to \infty} +\infty$ donc on a la dernière condition du théorème du cours garantissant l'existence d'un minimum.
   Comme le problème de minimisation est équivalent, on pourrait aussi se ramener ici à $F_p(x)^{1/p}$ qui est plus simplement convexe.
7. En utilisant le 1. (on peut aussi utiliser le résultat du cours disans Euniformément convexe qui est déduit de 1.), vérifions l'unicité du y dont on a montré l'existence à la question précédente. Si on a y_1, y_2 deux tels minimiseurs et que le minimum vaut d, par le 1 on a
   $$\left\|\frac{y_2 - y_1}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(||y_1||_p^p + ||y_2||_p^p - \left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - g\right\|_p^p) = d - \left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - g\right\|_p^p \leq 0.$$
   car par convexité $\frac{y_1+y_2}{2} \in C$ donc $F_p(\frac{y_1+y_2}{2}) \geq d$. d'où $\left\|\frac{y_2-y_1}{2}\right\|_p^p = 0$ et donc $y_1 = y_2$.
   On note à présent cet unique y par $P_C(g)$.

8. Soit $h \in C$, on rappelle que la définition du cône normal

$$N_C(h) := \{f \in L^q([0,1],\lambda) : \forall H \in C \int_{[0,1]} f(x)(H(x) - h(x))d\lambda(x) \leq 0\}$$

$N_C(h) = \cap_{H \in C} T(H-h)^{-1}(]-\infty, 0])$ est faiblement fermé dans $L^q([0,1],\lambda)$ comme intersection de faiblement fermés, obtenues par image inverse de fermé par les formes linéaires continues donc faiblement continues $T(H-h)$. Mais $N_C(h)$ n'est pas faiblement compact dans $L^q([0,1],\lambda)$ car il n'est pas borné sauf si $N_C(h) = \{0\}$ (soit pour h intérieur à C) (et que par la conséquence de banach-Steinhauss vue en cours un faiblement compact est borné). En effet c'est un cone si $f \in N_C(h)$, t>0, $tf \in N_C(h)$ et si $f \neq 0$ ce qui est possible si $N_C(h) \neq \{0\}$ et donc $||tf|| \to_{t\to\infty} \infty$ montre $N_C(h)$ pas borné.

9. Soit maintenant $g \in E$. Montrons que, la fonction définie à la question 6, F_p est différentiable en $h = g1_{\{g \geq 0\}} \in C$ et que la différentielle en h dans la direction $f \in E$ est donnée par

$$dF_p(h).f = \int_{[0,1]} p|g(x) - h(x)|^{p-1} f(x) d\lambda(x).$$

Par la dérivée de $|.|^p$ et l'inégalité des accroissements finis, on a pour $X \neq 0$

$$\big|\, |X+Y|^p - (|X|^p - p|X|^{p-1} signe(X)Y) \big| \leq \sup_{Z \in [X, X+Y]} p(p-1)|Z|^{p-2}|Y|^2.$$

En intégrant après application à $X = g(x) - h(x) = g1_{\{g<0\}} \leq 0$ et $Y = f(x)$ et en notant que là où $g(x) - h(x) = 0$ les termes intégrés du membre de gauche sont nuls :

$$\left| F_p(h+f) - F_p(h) - \int_{[0,1]} p|g(x)-h(x)|^{p-1} f(x) d\lambda(x) \right| \leq p(p-1) \int_{[0,1]} (|g(x)-h(x)| + |f|)^{p-2}|f|^2$$

Donc en appliquant l'inégalité de Holder à $(|g(x) - h(x)| + |f|)^{p-2} \in L^{p/(p-2)}$, $|f|^2 \in L^{p/2}$ vu $p/2 > 1$) :

$$\left| F_p(h+f) - F_p(h) - \int_{[0,1]} p|g(x)-h(x)|^{p-1} f(x) d\lambda(x) \right| \leq p(p-1)(||g-h||_p + ||f||_p)^{p-2}||f||_p^2$$

Cette inégalité exprime la différentiabilité cherchée et le calcul de la différentielle.

10. Par le théorème de minimisation des fonctions convexes dérivables du chapitre 2 (Th 44), $P_C(g)$ est caractérisée par $dF_p(P_C(g)) \in -N_C(P_C(g))$. On vérifie cela pour h pour lequel cela s'écrit vu $dF_p(h) = T(p|g(x) - h(x)|^{p-1})$:

$$\int_{[0,1]} p|g(x) - h(x)|^{p-1}(H(x) - h(x))d\lambda(x) \geq 0$$

pour tout $H \in C$.
Or $|g-h|^{p-1}h = |g1_{\{g<0\}}|^{p-1} g1_{\{g\geq 0\}} = 0$ et $|g(x) - h(x)|^{p-1} \geq 0, H \geq 0$ donc en intégrant le produit on obtient la valeure positive cherchée.

11. **(Bonus : 3 points)** Montrer que P_C est continue.

Il est facile de voir que si $g_n \to g$, $P_C(g_n)$ est une suite minimisante pour le problème posé en g donc par le théorème du cours (justifiée en 6) il a une sous-suite faiblement convergente vers un minimum, donc par unicité $P_C(g)$. En plus $||P_C(g_n)||_p \leq ||g_n||_p$ (car $0 \in C$) donc $P_C(g_n)$ est bornée, donc par compacité séquentielle faible, (cf cours prop 91 car E réflexif) si $P_C(g_n)$ ne convergeait pas vers $P_C(g)$, elle aurait une sous-suite loin de $P_C(g)$, qui a une sous sous-suite convergeant préfaiblement vers $p_C(g)$, une contradiction donc $P_C(g_n)$ converge faiblement vers $P_C(g)$. Par uniforme convexité donné par (1) (cf dernier exo du TD 6), il suffit de rappeler (vu au TD 2) que $||g_n - P_C(g_n)|| \to ||g - P_C(g)||$ pour avoir $g_n - P_C(g_n) \to g - P_C(g)$ et donc $P_C(g_n) \to P_C(g)$.

Il n' y a pas de solution à ma connaissance avec la formule explicite du 10.