Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2016-2017

**Examen du Jeudi 5 janvier 2017**
**Durée : 3H**

**Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.**
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

**Question de Cours : (4 points)**
Enoncer et prouver les théorèmes du graphe fermé et de l'application ouverte (pour la preuve, on pourra utiliser le lemme de Baire et le lemme des applications presque surjectives sans les démontrer).

**Problème 1 (7 points + Bonus : 1 point)** Soit $H = L^2([-1,1],\lambda,\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables sur $[-1,1]$ à valeur complexe de module au carré intégrable pour la mesure de Lebesgue $\lambda$. On munit cet espace de sa norme usuelle :

$$||h||_2^2 := \int_{-1}^{1} |h(x)|^2 d\lambda(x), \ si\ h \in H.$$

On note comme d'habitude $B(H)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de $H$ à valeur dans $H$.

On définit (l'indicatrice de $A$ noté $1_A$ et) la fonction

$$f(x) = 1_{[0,+\infty[}(x)(1-\frac{x}{2}) - 1_{]-\infty,0[}(x)(1+\frac{x}{2}).$$

On note pour $h \in H$, (en utilisant le produit usuel de fonctions)

$$X(h) = fh,$$

de sorte que $X$ est l'opérateur de multiplication par $f$.

1. Donner le produit scalaire hermitien associé à la norme de $H$.
2. Montrer que $X \in B(H)$ et que $|||X||| = 1$.
3. Montrer que $X = X^*$ et en déduire que le spectre de $X$ vérifie $\sigma(X) \subset [-1,1]$.
4. Soit $\lambda \in ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, montrer que $X-\lambda$ est inversible dans $B(H)$.
5. Soit $h = 1_{[0,1]} \in H$ et $\epsilon > 0$. Montrer que $(1+i\epsilon - X)^{-1}$ existe et que
$$||(1+i\epsilon - X)^{-1}h||_2^2 \to_{\epsilon\to 0} +\infty.$$
En déduire que $1 \in \sigma(X)$.
6. Montrer que $\sigma(X) = [-1,-1/2] \cup [1/2,1]$.
7. $X$ est il un opérateur compact ?
8. Calculer $\sigma(X^{-1})$ puis $|||X^{-1}|||$.
9. **(Bonus : 1 points)** Montrer que $X$ n'a pas de valeurs propres.

**Problème 2 (9 points + Bonus : 3 points)**

On rappelle que pour $E, F$ espaces vectoriels normés, $E \oplus^\infty F$ désigne l'espace $(E \times F, ||.||_\infty)$ avec norme $||(e,f)||_\infty = \max(||e||_E, ||f||_F)$. $\lambda$ désigne toujours la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\mu$ une mesure de probabilité sur $\Omega$ (donc avec $\mu(\Omega) = 1$). $\lambda \times \mu$ est la mesure produit.

Pour $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel normé

$$E_p = \left\{ f \in L^2([0,1] \times \Omega, \lambda \times \mu, \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)dt \in L^p(\Omega) \right\},$$

muni de la norme

$$||f|| = \max\left( ||f||_{L^2([0,1]\times\Omega)}, || \int_0^1 f(t)dt||_{L^p(\Omega)} \right).$$

1. Montrer que $I : E_p \to L^2([0,1] \times \Omega) \oplus^\infty L^p(\Omega)$ définie par $I(f) = (f, \int_0^1 f(t)dt)$ est linéaire continue.
2. Montrer que , pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(E_p, ||.||)$ est un espace de Banach.
3. Soit $p \in [1,2]$, montrer que $E_p = L^2([0,1] \times \Omega)$ et que la norme de $E_p$ est équivalente à la norme $||.||_2$ usuelle.
4. Montrer que $L^2([0,1]) \oplus^\infty L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$.
5. Montrer que $E_p$ est réflexif pour $1 \leq p < +\infty$.
6. Soit $X \in L^p(\Omega)$ et $1 < p < +\infty$. On pose :

$$V(X) = \inf\{||f||_2^2 + ||X + \int_0^1 f(t)dt||_p^p; f \in E_p\}.$$

   Montrer que l'infimum est atteint en un unique $f \in E_p$.
7. Montrer que $V$ est convexe.
8. On note pour $q \in [1,2]$,

$$F_q = \{f \in L^q([0,1]\times\Omega, \lambda\times\Omega, \mathbb{R}) : f(t,\omega) = g(t,\omega)+h(\omega), g \in L^2([0,1]\times\Omega, \lambda\times\Omega, \mathbb{R}), h \in L^q(\Omega)\}.$$

   Montrer que l'application suivante définit bien une norme sur $F_q$ :

$$N(f) = \inf\{||g||_2 + ||h||_q, f = g + h, g \in L^2([0,1] \times \Omega, \lambda \times \Omega, \mathbb{R}), h \in L^q(\Omega)\}.$$

9. **(Bonus : 1 point)** Si $q > 1$ montrer que l'infimum est atteint.
10. Construire une injection linéaire continue de $F_q \to (E_p)'$ pour $1/p + 1/q = 1$. En déduire que $F_q$ est un espace de Banach.
11. **(Bonus : 2 points)** Montrer que $F_q$ et $(E_p)'$ sont isométriquement isomorphes si $1/p+1/q = 1$ et $q \in ]1,2]$.