Université Claude Bernard — Mathématiques
M1G Analyse — 2015-2016

Correction de l'Examen du Jeudi 5 janvier 2017

Question de Cours : (3 points)

Problème 1 (8 points + Bonus : 2 points) Soit $H = L^2([-1,1],\lambda,\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des des fonctions mesurables sur $[-1,1]$ à valeur complexe de module au carré intégrables pour la mesure de Lebesgue λ. On munit cet espace de sa norme usuelle :

$$||h||^2 := \int_{-1}^{1} |h(x)|^2 d\lambda(x), \ \ si\ f \in H.$$

On note comme d'habitude $B(H)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de H à valeur dans H.

On définit (l'indicatrice de A noté 1_A et) la fonction

$$f(x) = 1_{[0,+\infty[}(x)(1-\frac{x}{2}) - 1_{]-\infty,0[}(x)(1+\frac{x}{2}).$$

On note pour $h \in H$, (en utilisant le produit usuel de fonctions)

$$X(h) = fh,$$

de sorte que X est l'opérateur de multiplication par f.

1. Donner le produit scalaire hermitien associé à la norme de H.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) d\lambda(x)$$

Il est bien linéaires en la deuxième variable, hermitiennement symétrique donc il suffit que la norme associée soit la bonne, ce qui est le cas, pour que l'unicité (venant de la formule de polarisation) implique que ce sont bien les produits scalaires cherchés.

2. Montrons que $X \in B(H)$ et que $|||X||| = 1$.
On a X linéaire par linéarité de la multiplication ; par Holder, on a :

$$||Xh||_2^2 = \int |f(t)h(t)|^2 dt \leq ||f||_\infty ||h||_2^2$$

donc X continue car borné sur la boule unité et $|||X||| \leq 1$.
Prenons $h = 1_{[0,\epsilon]}$ et calculons

$$||Xh||_2^2 = \int_0^\epsilon |f(t)|^2 dt = \int_0^\epsilon (1-t/2)^2 dt = [-2(1-t/2)^3/3]_0^\epsilon = 2/3(1-(1-\epsilon/2)^3) \sim_{\epsilon\to 0} \epsilon$$

et $||h||_2^2 = \epsilon$ de sorte que $||Xh||_2^2/||h||_2^2 \to_{\epsilon\to 0} 1$ et on a bien $|||X||| \geq 1$.

3. $X = X^*$ car f à $\underline{\text{valeur réelle}}$, $\underline{\text{donc par}}$ le cours $\sigma(X) \subset \mathbb{R}$, de plus par la formule du rayon spectrale $\sigma(X) \subset \overline{B(0,||X||)} = \overline{B(0,1)}$ par 2 d'où $\sigma(X) \subset [-1,1]$.

4. Soit $\lambda \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, montrons que $X-\lambda$ est inversible dans $B(H)$. On va donner l'inverse comme fonction de multiplication $Y : h \mapsto \frac{1}{f-\lambda}h$. comme f à valeur dans $[-1,-1/2]\cup[1/2,1]$, $f-\lambda$ est à valeur dans $[-1-\lambda,-1/2-\lambda]\cup[1/2-\lambda,1-\lambda]$ donc $|f(x)-\lambda| \geq (1/2-|\lambda|) > 0$ donc l'inverse est bien défini comme fonction mais il faut vérifier $Y(h) \in H$: En effet, comme avant par Holder :
$$||\frac{1}{f-\lambda}h||_2 \leq ||\frac{1}{f-\lambda}||_\infty ||h||_2 \leq \frac{1}{1/2-|\lambda|}||h||_2$$
Donc Y est bien linéaire continue et $||Y|| \leq \frac{1}{1/2-|\lambda|}$.
méthode 2 On peut aussi utiliser le théorème de l'application ouverte entre les deux espaces de Hilbert H pour voir que Y continue mais il faut voir voir que $X-\lambda$ bijectif (on a déjà vu continue). Le point clef est d'obtenir l'inverse $Y : H \to H$ en vérifiant que $Y(h)$ est bien dans H ce qui revient à la même borne que précédemment.
5. Soit $h = 1_{[0,1]} \in H$ et $\epsilon > 0$. $(1+i\epsilon-X)^{-1}$ existe car $1+i\epsilon \notin \sigma(X)$ car le spectre est réel (et $1+i\epsilon-X$ inversible si et seulement si $X-(1+i\epsilon)$ inversible) et que
$$||(1+i\epsilon-X)^{-1}h||_2^2 = \int_0^1 1/(\epsilon^2+(x/2)^2)dx \to_{\epsilon\to 0} \int_0^1 1/((x/2)^2)dx = +\infty.$$
La limite vient du Théorème de convergence monotone et le caractère infini des intégrales de Riemann.
Si on avait $1 \notin \sigma(X)$ on aurait $\lambda \mapsto (\lambda-X)^{-1}$ continue en 1 (comme en cours en utilisant par exemple la série de Neumann) en dehors du spectre et, donc par continuité de la norme et de l'évaluation $\lambda \mapsto ||(\lambda-X)^{-1}h||_2^2$ serait continue en 1 et la limite précédente serait donc finie. La contradiction donne $1 \in \sigma(X)$.
6. Montrons que $\sigma(X) = [-1,-1/2]\cup[1/2,1]$. On a déjà vu par 4 et 3 $\sigma(X) \subset [-1,-1/2]\cup[1/2,1]$ et donc on raisonne comme pour $1 \in \sigma(X)$. On a pour $\lambda \in [1/2,1]$ par le même calcul et encore convergence monotone
$$||(\lambda+i\epsilon-X)^{-1}h||_2^2 = \int_0^1 1/(\epsilon^2+(\lambda-1+x/2)^2dx \to_{\epsilon\to 0} \int_0^1 1/((\lambda-1+x/2)^2)dx$$
Comme $1-\lambda \in [0,1/2]$ l'intégrale diverge au point $2(1-\lambda)$ ce qui conclut ce cas comme précédemment en utilisant la continuité en λ sur l'ensemble résolvant. Le cas $x \leq 0$ est similaire mais nécessite de remplacer h par $k = 1_{[-1,0]}$ puisque c'est sur cet intervalle que f prend des valeurs négatives.
7. X n'est pas un opérateur compact car en dimension infinie on a toujours $0 \in \sigma(X)$ pour un tel opérateur (par le Th de compacité de Riesz, sinon, identité serait compact comme XX^{-1}) Ce n'est pas le cas par les questions précédentes.
8. Par le théorème du calcul fonctionnel $\sigma(X^{-1}) = |\sigma(X)]^{-1} = [-2,-1]\cup[1,2]$ d'où par la formule du rayon spectrale vu X^{-1} autoadjoint : $|||X^{-1}||| = 2$.
9. **(Bonus : 1 point** Montrer que X n'a pas de valeurs propres.
Si $Xh = \lambda h$ on a l'égalité des fonctions qui entraine comme $f-\lambda$ pp non nulle (attention on ne peut pas avoir non nulle partout si λ est une valeur dde l'image de f) que h est p.p. nulle (idem on ne peut pas avoir nulle partout), mais cela implique nulle dans L^2. Donc X n'a pas de vecteurs propres non nuls.

Problème 2 (9 points + Bonus : 3 points)

On rappelle que pour E, F espaces vectoriels normés, $E \oplus^\infty F$ désigne l'espace $(E \times F, ||.||_\infty)$ avec $||(e,f)||_\infty = \max(||e||_E, ||f||_F)$. λ désugne toujours la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et μ une mesure de probabilité Ω (donc avec $\mu(\Omega) = 1$). $\lambda \times \mu$ est la mesure produit.

Pour $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel normé

$$E_\lambda = \{f \in L^2(([0,1] \times \Omega, \lambda \times \mu, \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)dt \in L^p(\Omega)\},$$

muni de la norm

$$||f|| = \max(||f||_{L^2([0,1]\times\Omega)}, ||\int_0^1 f(t)dt||_{L^p(\Omega)}.$$

1. Montrons que $I : E_p \to L^2([0,1] \times \Omega) \oplus^\infty L^p(\Omega)$ définie par $I(f) = (f, \int_0^1 f(t)dt)$ est linéaire continue. I est linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus :
$$||I(f)|| = \max(||f||_2, ||\int_0^1 f(t)dt||_{L^p(\Omega)}) = ||f||$$
donc I est continue (car bornée sur la boule unité) et même isométrique.
2. Montrer, pour tout $p \in [1, +\infty]$ $(E_p, ||.||)$ est un espace de Banach. Comme I isométrique il suffit de voir que le membre de droite est Banach (cf cours sur les espaces L^p) et que $Im(I) = \{(f,g) : g = \int_0^1 f(t)dt\}$ est fermé. En effet, $Im(I)$ sera Banach comme fermé d'un Banach et E_p qui est isométrique à $Im(I)$ aussi. Voyons donc que $Im(I)$ fermé. Si $(f_n, g_n) \to (f,g)$ alors $||f_n - f||_1 \leq ||f_n - f||_2 \to 0$ et $g_n = \int_0^1 f_n(t)dt \to g$ et par Holder à nouveau $||g_n - g||_1 \leq ||g_n - g||_p \to 0$ Or par inégalité triangulaire $|\int_0^1 (f_n(t) - f(t))dt| \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt$ donc en intégrant sur Ω $||\int_0^1 (f_n(t) - f(t))dt||_1 \leq ||f_n - f||_1 \to 0$ donc la limite de g_n dans L^1 est $g = \int_0^1 f(t)dt$. Ceci montre $Im(I)$ fermé et conclut.
3. Soit $p \in [1,2]$, montrer que $E_p = L^2([0,1] \times \Omega)$. Vu que par Holder :
$$||\int_0^1 f(t)dt||_{L^p(\Omega)} \leq ||\int_0^1 f(t)dt||_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\int_0^1 ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt} = ||f||_2$$
on a donc que la norme de E_p est dominée par la norme $||.||_2$donc $||f|| \leq ||f||_2$ et la réciproque est évidente donc les normes sont équivalentes (même égales).
4. Montrons que $L^2([0,1]) \oplus^\infty L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$.

   On donne 3 méthodes correspondant à des tentatives dans divers copies. La méthode 1 est la plus technique et je ne donne que l'idée. Méthode 1 (partielle) : On remarque que $L^2([0,1]) \oplus^\infty L^p(\Omega) \simeq L^2([0,1]) \oplus^2 L^p(\Omega)$ c'est à dire avec norme $||(e,f)||_2 = \sqrt{||e||_E^2 + ||f||_F^2}$. Les normes sont équivalentes car $||(e,f)||_2 \leq \sqrt{2}||(e,f)||_\infty \leq \sqrt{2}||(e,f)||_2$. Si la somme $\oplus^\infty$ ne pouvait pas être uniformément convexe (car elle contient $(\mathbb{C}^2, ||.||_\infty)$ qui ne l'est pas) la nouvelle norme l'est et donc l'espace est réflexif par Millman-Petis et comme cette propriété ne dépend pas des normes équivalentes, on déduit que $L^2([0,1]) \oplus^\infty L^p(\Omega)$ est réflexif. Vérifier que $L^2([0,1]) \oplus^2 L^p(\Omega)$ est uniformément convexe est assez pénible. Méthode 2 : On va voir que son dual est $(L^2([0,1])) \oplus^1 (L^p(\Omega))' = L^2([0,1]) \oplus^1 L^q(\Omega)$ et que le dual de celui-ci est $(L^2([0,1]))'' \oplus^\infty (L^p(\Omega))''$. Par réflexivité des 2 membres on déduira que l'espace est bien réflexif (car les dualités sont compatibles avec J par la définition de I plus bas).

En général Montrons que

$$I(\lambda,u)(\mu,f)=\lambda(\mu)+u(f)$$

définit (formellement par la même formule) des isométries surjectives $I : F'\oplus^1 E' \to (F\oplus^\infty E)'$ et $I : F''\oplus^\infty E'' \to (F'\oplus^1 E')'$

D'abord dans le premier cas :

$$|I(\lambda,u)(\mu,f)| \leq \max(||\mu||_F, ||f||_E)(||\lambda||_{F'}+||u||_{E'}) = ||(\lambda,u)||_{F'\oplus^1 E'}||(\mu,f)||_{F\oplus^\infty E}$$

et dans le second cas

$$|I(\lambda,u)(\mu,f)| \leq (||\mu||+||f||_{E'})\max(||\lambda||, ||u||_{E''}) = ||(\lambda,u)||_{F''\oplus^\infty E''}||(\mu,f)||_{F'\oplus^1 E'}$$

d'où I bien défini et dans chaque cas $|||I|||\leq 1$

Réciproquement, si $(\lambda,u)\in F'\oplus^1 E'$, on prend f avec $||f||_E\leq 1$ tel que $u(f)=|u(f)|\geq ||u||_{E'}-\epsilon$, μ avec $||\mu||_F\leq 1$ tel que $\mu(\lambda)\geq ||\lambda||_{F'}-\epsilon>0$

Donc

$$|I(\lambda,u)(\mu,f)|=|\mu(\lambda)|+|u(f)|\geq ||(\lambda,u)||_{\mathbb{R}\oplus^1 E'}-2\epsilon$$

et comme $||(\mu,f)||_{\mathbb{R}\oplus^\infty E}\leq 1$, on trouve :

$$||I(\lambda,u)||_{((F\oplus^\infty E)'}\geq ||(\lambda,u)||_{F'\oplus^1 E'}-2\epsilon \to_{\epsilon\to 0} ||(\lambda,u)||_{F'\oplus^1 E'}.$$

La deuxième propriété d'isométrie est similaire. Si $(\lambda,u)\in F''\oplus^\infty E''$ et on peut prendre $f\in E'$ avec $||f||_{E'}=1$ et $u(f)=||u||_{E''}$(cf cours utilisant Hahn-Banach) et $\mu\in F'$ avec $||\mu||_{F'}=1$ et $\lambda(\mu)=||\lambda||_{F''}$.

$$|I(\lambda,u)(0,f)|=|u(f)|=||u||_{E''}, |I(\lambda,u)(\mu,0)|=|\lambda(\mu)|=||\lambda||_{F''}$$

donc

$$||I(\lambda,u)||_{(F'\oplus^1 E')'}\geq \max(||\lambda||, ||u||_E)=||(\lambda,u)||_{(F''\oplus^\infty E'')}.$$

Pour la surjectivité, on a la formule explicite disons pour $F\in(F\oplus^\infty E)'$

$$I^{-1}(F)=(F(.,0),F(0,.))\in F'\oplus^1 E'.$$

Enfin, le fait que c'est le même type de formule pour les deux applications I montre que c'est compatible avec J l'injection canonique dans le bidual soir le J pour la somme directe est $(I^*)^{-1}\circ I\circ(J_{L^2}\oplus^\infty J_{L^p})$ et comme toutes les application sont bijectives, leur composée aussi. méthode 3 : En utilisant le théorème de Kakutani (deux fois), il suffit de voir que la boule unité est faiblement compacte. Pour cela, il suffit de calculer un dual comme au 2, $L^2([0,1])\oplus^1 L^q(\Omega)$. La boule unité est le produit des boules et il est facile de voir que la topologie faible est la topologie produit des topologies faibles, comme un produit de compact est compact et que chacun des côtés est réflexif, leurs boules unités sont faiblement compacts et elle est bien faiblement compacte.

5. Alors E_p est réflexif pour $1<p<+\infty$ comme sous-espace fermé de $L^2([0,1]\times\Omega)\oplus^\infty L^p(\Omega)$, dans le cas $p=1$ c'est un Hilbert par 3 donc il est aussi réflexif.

6. Soit $X \in L^p(\Omega)$. On pose :

$$V(X) = \inf\{||f||_2^2 + ||X + \int_0^t f(t)dt||_p^p ; f \in E_p\}.$$

Montrer que l'infimum est atteint en un unique $f \in E_p$. Soit $G(f) = ||f||_2^2 + ||X + \int_0^t f(t)dt||_p^p$, on a bien $G(f) \geq ||f||_2^2 \to \infty$, E_p un espace de Banach réflexif, G est convexe, par convexité des normes et des puissances $x^\alpha, \alpha \geq 1$ (et croissance des puissances). en effet, pour $\lambda \in]0,1[$,

$$||\lambda f + (1-\lambda)g||^\alpha \leq (\lambda||f|| + (1-\lambda)||g||)^\alpha \leq \lambda||f||^\alpha + (1-\lambda)||g||^\alpha.$$

Donc les deux termes de la comme de G sont convexes (aussi par composition avec l'intégrale qui est linéaire, d'où $f \mapsto X + \int_0^t f(t)dt$ affine)
L'unicité vient par stricte convexité de G ($f \mapsto ||f||^2$ est strictement convexe par l'inégalité du parallélogramme et la somme avec une fonction convexe est encore convexe). Si on avait deux solutions f, g on aurait $G((f+g)/2) < (G(f)+G(g))/2$ et f, g ne seraient pas optimales.

7. Montrons que V est convexe. On prend à l'infimum d'une fonction convexe du couple $(X, f) \mapsto ||f||_2^2 + ||X + \int_0^t f(t)dt||_p^p$ (la convexité de cette fonction vient comme au point précédent par composée de fonctions linéaires avec les puissances $\alpha \geq 1$ des normes), sur un ensemble convexe E_p. On a vu ce résultat en TD (attention, contrairement au suprémum qui laisse stable la convexité sans condition, il est crucial que l'ensemble sur lequel on prend l'infimum soit convexe et que la fonction soit convexe du couple).

8. On note pour $q \in [1,2]$,

$$F_q = \{f \in L^q([0,1]\times\Omega, \lambda\times\Omega, \mathbb{R}) : f(t,\omega) = g(t,\omega)+h(\omega), g \in L^2([0,1]\times\Omega, \lambda\times\Omega, \mathbb{R}), h \in L^q(\Omega)\}.$$

Montrons que l'application suivante défini bien une norme sur F_q :

$$N(f) = \inf\{||g||_2 + ||h||_q, f = g + h, g \in L^2([0,1] \times \Omega, \lambda \times \Omega, \mathbb{R}), h \in L^q(\Omega)\}.$$

Le seul point subtil est la séparation car on ne sait pas si l'infimum est atteint (pour $q = 1$). Si $N(f) = 0$, on a g_n, h_n avec $||f||_1 = ||g_n + h_n||_1 \leq ||g_n||_2 + ||h_n||_q \to 0$ par Hölder pour l'inégalité donc $||f||_1 = 0$, donc $f = 0$.

9. **(Bonus : 1 point)**Si $q > 1$, montrons que l'infimum est atteint. C'est la même démo qu'en 6 si on choisit la bonne fonction $H(g,h) = ||g||_2 + ||h||_q$ sur $C \subset L^2([0,1] \times \Omega) \oplus^\infty L^q(\Omega)$ réflexif par 4, $C = \{(g,h)g + h = f\}$ est convexe (sous-espace affine) fermé (en utilisant la convergence L^1 si g_n, h_n convergent, elles convergent dans L^1 et par continuité de la somme la limite vérifie $g + h = f$), coercif (limite infinie à l'infinie, H est une norme équivalente), continue convexe (car H est une norme équivalente la norme de $L^2([0,1] \times \Omega) \oplus^1 L^q(\Omega)$)).

10. Construisons une injection linéaire continue de $J : F_q \to (E_p)'$ pour $1/p + 1/q = 1$. Il suffit de noter que pour $F \in F_q, f \in E_p$, si $J(F)(f) = \int Ff$ on a pour tout décomposition $F = g + h$, on a par Fubini, puis Holder pour les inégalités :

$$|J(F)(f)| \leq |\int_{[-1,1]\times\Omega} gf| + |\int_\Omega \int_0^1 f(t)dth| \leq ||h||_q|| \int_0^1 f(t)dt||_p + ||g||_2||f||_2 \leq ||f||_{E_p}(||g||_2 + ||h||_q)$$

et en passant à l'inf on obtient : $|J(F)(f)| \leq ||f||_{E_p}||F||_{F_q}$ ce qui donne la continuité de $J(F)$ puis $||J(F)||_{E_p'}`||F||_q$ soit comme J est linéaire, la continuité de J. qui est conforme à ce que l'on fait maintenant.

POur déduire que F_q est un espace de Banach, On montre que $J(F_q)$ est fermé puis que la norme induite est équivalente à la norme de F_q. Alors comme tout dual est complet, on aura que $J(F_q)$ complet comme fermé d'un complet. Par les normes équivalentes, une suite de Cauchy de F_q est de Cauchy dans $J(F_q)$ (cela nécessite seulement J linéaire continue ou même uniformément continue) donc converge dans $J(F_q)$, donc dans F_q (c'est là qu'on utilise équivalence des normes, J^{-1} continue.

On commence par l'équivalence des normes : Notons que $||J(g+h)|| \geq ||\int_0^1 g(t)dt + h||_q = \sup_{||f||_{L^p(\Omega)}\leq 1} |J(g+h)(f)|$ car les fonctions constantes de $L^p(\Omega)$ sont dans E_p. La formule vient de la dualité L^p, L^q ($(L^p)'$ contient L^q isométriquement même pour $q=1$) De plus soit $f \in L^2, ||f||_2 \leq 1$ avec $\int_0^1 f(t)dt = 0$, on a $||f||_{E_p} \leq 1$, Donc (comme f est orthogonale aux fonctions constantes en t $J(g+h)(f) = J(g - \int_0^1 g(t)dt)(f)$ et en passant au sup sur $||f||_2 \leq 1$, comme $g - \int_0^1 g(t)dt$ est aussi dans l'orthogonal des fonction constante en t $||g - \int_0^1 g(t)dt||_2 \leq ||J(g+h)||_{E_p'}$. Bilan, pour toute paire g, h avec $f = g + h$,

$$\begin{aligned}
||J(g+h)||_{E_p'} &\geq \max(||g - \int_0^1 g(t)dt||_2, ||\int_0^1 g(t)dt + h||_q) \\
&\geq ||g - \int_0^1 g(t)dt||_2/2 + ||\int_0^1 g(t)dt + h||_q/2 \\
&\geq ||g+h||_{F_q}/2
\end{aligned}$$

puisqu'on a trouvé une autre décomposition de $f = g - \int_0^1 g(t)dt + \int_0^1 g(t)dt + h$ et que la norme de F_q est l'infimum sur les décompositions.

Pour $J(F_q)$ soit g_n, h_n tel que $J(g_n + h_n)$ converge vers $f \in E_p' \subset (L^p)' \supset L^q$ (et par définition on sait $J(g_n + h_n)$ dans L^q donc comme $L^q \subset (L^q)''$ est fermé (même dans le cas $q = 1$) on déduit convergence vers f dans L^q. On déduit $\int_0^1 g_n(t)dt + h_n \to \int_0^1 f(t)dt =: h$ dans $L^q(\Omega)$. Il reste à voir $f - J(h) \in L^2$. C'est la limite de $J(g_n - \int_0^1 g_n(t)dt)$ dans L^q. Comme pour l'équivalence des normes on utilise que cette suite est de Cauchy dans l'orthogonale des fonctions constantes en t dans L^2 qui est contenu dans E_p. Comme celui-ci est complet elle converge et $f - J(h) \in L^2$ comme voulu.

11. **(Bonus : 2 points)** Montrons que F_q et $(E_p)'$ sont isométriquement isomorphes si $p < \infty, q > 1$. Pour J surjective, on raisonne pour $f \in E_p'$ comme ci-dessus, en restreignant aux fonctions constantes en t on obtient un élément de $h \in (L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), p < \infty$ et en restreignant aux fonctions d'intégrale nulle en t et dans L^2 (qui un un Hilbert, l'orthogonale dans L^2 des fonctions constantes en t), on obtient $f - J(h)$ vient de $J(g)$, avec g fonction d'intégrale nulle et dans L^2. Donc $f = J(g+h)$. La question précédente donne l'équivalence des normes. L'isométrie est plus dure, c'est la dualité des sous-espaces (E_p est un sous-espace muni de la norme induite) et des quotients (F_q est un espace muni de la norme quotient) utilisant Hahn-Banach (cf cours de l'an dernier au chapitre corollaires de Hahn-Banach).