Université Claude Bernard
M1G Analyse

Mathématiques
2017-2018

Examen du Mardi 9 janvier 2018
Durée : 3H

Les documents de toute nature, les calculatrices et les téléphones sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Problème 1 (10 points + Bonus : 3 points) Soit $H = L^2([0,1]^2, \lambda^2, \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des (classes d'équivalence à égalité presque partout près de) fonctions mesurables sur $[0,1]^2 = [0,1]\times[0,1]$ à valeur complexe de module au carré intégrable pour la mesure produit $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$ des mesures de Lebesgue λ sur $[0,1]$. On munit cet espace de sa norme usuelle :

$$||h||_2^2 := \int_0^1 d\lambda(x) \int_0^1 d\lambda(y)|h(x,y)|^2, \ si\ h \in H.$$

On note comme d'habitude $B(H)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de H à valeur dans H. On note $|||T|||$ la norme d'opérateur de $T \in B(H)$.

On définit

$$T = 2P - R$$

avec :

$$P(f)(x,y) = \int_0^1 d\lambda(z) f(x,z),$$

$$R(f)(x,y) = x^2 f(x,y).$$

Comme d'habitude on écrit TP pour la composition de T et P.

1. Montrer que $P \in B(H)$ est la projection orthogonale sur un sous-espace que l'on précisera.
2. Que vaut le spectre $\sigma(P)$?
3. Montrer que $R \in B(H)$ et que $|||R||| \leq 1$.
4. Montrer que
$$||P(x)||_2^2 \leq ||TP(x)||_2^2 \leq 4||P(x)||_2^2.$$
5. Montrer que
$$||Tx - TP(x)||_2^2 \leq ||x - P(x)||_2^2.$$
6. Vérifier que $TP = PT$.
7. Montrer que $|||T||| \leq 2$.
8. Montrer que $T = T^*$ et $T + 1$ est un opérateur positif et en déduire que le spectre de T vérifie $\sigma(T) \subset [-1, 2]$. (On pourra utiliser sans les redémontrer les résultats sur le spectre des opérateurs autoadjoints et positifs vu en cours et montrés en TD).
9. Soit $t \in]0,1[$, montrer que $T - t$ est inversible dans $B(H)$.
10. Soit $h(x,y) = y - 1/2$ vu comme $h \in H$ et $\epsilon > 0$. Montrer que $(i\epsilon - T)^{-1}$ existe et que
$$||(i\epsilon - T)^{-1}h||_2^2 \to_{\epsilon\to 0} +\infty.$$
En déduire que $0 \in \sigma(T)$.

11. **(Bonus : 2 points)** Montrer que $\sigma(T) = [-1, 0] \cup [1, 2]$.
12. Parmi P, R, T, lesquels sont des opérateurs compacts ?
13. **(Bonus : 1 point)** Calculer $\sigma((2T - 1)^{-1})$ puis $|||(2T - 1)^{-1}|||$.

Problème 2 (10 points)

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et $1 < p < \infty$, q l'exposant conjugué de p tel que $1/p + 1/q = 1$.

On considère $E = L^p([0, 1], \lambda)$ l'espace de Banach des (classes d'équivalence à égalité presque partout près de) fonctions mesurables $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de puissance p-ème intégrable avec sa norme usuelle :

$$||f||_p^p = \int_{[0,1]} |f(x)|^p d\lambda(x).$$

De même, on note $F = L^q([0, 1], \lambda)$.

On définit les ensembles

$$C = \{g \in E \ : \ ||g||_1 \leq 1 \ \}$$

et

$$K = \{f \in F \ : \ |f(x)| \leq 1 \ p.p.\}.$$

On pose pour $f \in E, x \in [0, 1]$:

$$M(f)(x) = xf(x).$$

1. Rappeler pourquoi $E \subset L^1([0, 1])$ et pourquoi cette inclusion donne une application linéaire continue $I : E \to L^1([0, 1], \lambda)$.
2. Montrer que $||f||_1 = \int_{[0,1]} |f(x)|d\lambda(x)$ est une norme sur E qui n'est pas équivalente à $|| \cdot ||_p$.
3. Montrer que $(E, || \cdot ||_1)$ n'est pas complet.
4. Montrer que $M \in L(E, E)$ l'espace des applications linéaires continues. Montrer que sa norme subordonnée est $|||M||| = 1$.
5. Montrer que $(M + 1)$ est inversible et que $(M + 1)^{-1} \in L(E, E)$.
6. Rappeler le théorème de représentation de Riesz donnant le dual de E.
7. Montrer que C est un convexe fermé de E (pour sa norme $|| \cdot ||_p$).
8. Montrer qu'on a la description alternative :

   $$K = \{g \in F : \forall f \in C : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \leq 1\}.$$

   En déduire que K est un convexe fermé de $L^q([0, 1], \lambda)$.
9. Dans le cas $p = q = 2$. Montrer que la projection sur le convexe fermé K est donnée par la formule $P_K(g) = \max(\min(g, 1), -1)$.
10. Montrer que pour tout $g \in F$, il existe un $y \in K$ atteignant le minimum de

    $$F_q(c) = ||g - c||_q^q$$

    sur K, c'est-à-dire :

    $$||g - y||_q^q = \inf_{k \in K} ||g - k||_q^q.$$