Université Claude Bernard $\hfill$ Mathématiques
M1G Analyse $\hfill$ 2017-2018

Correction de l'Examen du Mardi 9 janvier 2018

Problème 1 (10 points + Bonus : 3 points) Soit $H = L^2([0,1]^2, \lambda, \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables sur $[0,1]^2$ à valeur complexe de module au carré intégrable pour la mesure de Lebesgue λ. On munit cet espace de sa norme usuelle :

$$||h||_2^2 := \int_0^1 d\lambda(x) \int_0^1 d\lambda(y)|h(x,y)|^2, \ si\ h \in H.$$

On note comme d'habitude $B(H)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de H à valeur dans H. On note $|||T|||$ la norme d'opérateur de $T \in B(H)$.

On définit

$$T = 2P - R$$

avec :

$$P(f)(x,y) = \int_0^1 d\lambda(z) f(x,z),$$
$$R(f)(x,y) = x^2 f(x,y).$$

Comme d'habitude on écrit TP pour la composition de T et P.

1. Montrons que P est la projection orthogonale sur le sous-espace K des fonctions $p.p$ constantes en la deuxième variable y (précisément les f tels que $f(x,y) = f(x,z) = \overline{f}(x)$ pour tout $(x,y),(x,z) \in A$ et un certain A tel que $\lambda(A) = 1$. ALors $\overline{f}$ est mesurable vu qu'en intégrant on obtient $\overline{f}(x) = \int_0^1 f(x,z)dz$). Comme une projection orthogonale est une contraction par le théorème de projection sur un convexe fermé cela conclura a $P \in B(H)$.
D'abord K est clairement un sev. Si $f_n \in K$ $f_n \to f$ on a vu en cours que quitte à extraire, on a convergence p.p., donc sur l'intersection des A_n correspondant à f_n et de l'ensemble sur lequel on a convergence, on passe à la limite dans $f_n(x,y) = f_n(x,z)$ pour avoir $f(x,y) = f(x,z)$. Donc K est bien fermé et le thm de projection sur un s.e.v fermé s'applique.
Il suffit donc de vérifier la caractérisation, à savoir que $g - P(g)$ est orthogonal à K. Or pour $f \in K$, on a A de mesure 1 comme ci-dessus. Donc, vu $fg \in L^1$ permettant d'utiliser Fubini,
$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} fg &= \int d\lambda(x) \int d\lambda(y) 1_A(x,y) f(x,y) g(x,y) = \int d\lambda(x)\overline{f}(x) \int d\lambda(y) 1_A(x,y) g(x,y) \\ &= \int d\lambda(x)\overline{f}(x) \int d\lambda(y) g(x,y) = \int d\lambda(x)\overline{f}(x)\overline{Pg}(x) \\ &= \int_{[0,1]^2} f(Pg).\end{aligned}$$
où on a utilisé que par Fubini-tonelli, pour presque tout x on a $\{y : (x,y) \in A\}$ est de mesure 1 de sorte $\int d\lambda(y) 1_A(x,y) f(x,y) = \int d\lambda(y) f(x,y)$ pour p.p. x. L'égalité ci dessus donne donc $\int_{[0,1]^2} f(g - Pg) = 0$ d'où la caractérisation de la projection voulue.
2. Le spectre $\sigma(P) \subset \{0,1\}$ vu le cours comme $P(1-P) = 0$ implique que le spectre de P est inclus dans les racines du polynôme correspondant. Mais $1 \in K$ vérifie $P1 = 1$ et $h(x,y) = y - 1/2$ donne $h \in K^\perp$ (car $Ph = 0$) donc les deux valeurs propres sont atteintes et donc on a l'égalité $\sigma(P) = \{0,1\}$.

3. Montrons que $R \in B(H)$ et que $|||R||| \leq 1$.
D'abord par linéarité de la multiplication, R est linéaire, ensuite $||R(f)||_2^2 = \int dxdyx^4|f(x,y)|^2 \leq \int dxdy|f(x,y)|^2 = ||f||_2^2$ vu $x^4 \in [0,1]$ donc R est borné sur la boule unité donc continue et R est une contraction puisqu'on déduit de l'inégalité précédente $|||R||| \leq 1$ en passant au sup sur $||f||_2 \leq 1$.
4. $TP = (2-R)P$ vu la propriété de projection $P^2 = P$.
On calcule $||TP(f)||_2^2 = \int_{[0,1]^2}(2-x^2)^2|Pf(x,y)|^2dxdy \in [||P(x)||_2^2, 4||P(x)||_2^2]$ vu $(2-x^2)^2 \in [1,4]$, pour $x \in [0,1]$.
5. De même $T(1-P) = -R(1-P)$ vu P projection donc comme R contraction on a l'inégalité :
$$||Tx - TP(x)||_2^2 \leq |||R|||\ ||x-P(x)||_2^2 \leq ||x-P(x)||_2^2.$$
6. Vérifions que $TP = PT$. Or $TP = (2-R)P, PT = P(2-R)$ vu P projection donc il suffit de voir $RP = PR$. Mais
$$P(Rf)(x,y) = \int_0^1 d\lambda(z)x^2f(x,z) = x^2\int_0^1 d\lambda(z)f(x,z),$$
car l'intégrale ne dépend pas de x. et enfin, la dernière expression est bien $RP(f)(x,y)$ comme voulue.
7. Montrons que $|||T||| \leq 2$.
On utilise la décomposition ci dessus. On utilise que $TP = PT$ d'où, par orthogonalité :
$$\begin{aligned}||T(x)||_2^2 = ||P(T(x))||_2^2 + ||(1-P)(T(x))||_2^2 &= ||T(P(x))||_2^2 + ||T((1-P)(x))||_2^2 \\ \leq 4||P(x)||_2^2 + ||x-P(x)||_2^2 &\leq 4||x||_2^2.\end{aligned}$$
avec l'inégalité venant des questions 4 et 5. En passant au sup sur la boule unité, cela donne $|||T||| \leq 2$.
8. Pour montrer que $T = T^*$ vu qu'une projection orthogonale vérifie et $P = P^*$ il suffit de voir $R = R^*$ qui vient du fait que $\int x^2f(x,y)g(x,y) = \int f(x,y)x^2g(x,y)$ (en fait R est positif). Pour voir que $T+1$ est un opérateur positif, il faut voir $\langle (T+1)(x), x\rangle \geq 0$ pour tout x. Or
$$\begin{aligned}\langle (T+1)(x), x\rangle &= \langle (T+1)(P(x)), P(x)\rangle + \langle (T+1)(1-P(x)), (1-P)(x)\rangle \\ &= \langle (3-R)(P(x)), P(x)\rangle + \langle (1-R)(1-P(x)), (1-P)(x)\rangle \\ &\geq \langle 2(P(x)), P(x)\rangle + \langle 0(1-P(x)), (1-P)(x)\rangle,\end{aligned}$$
vu $1-x^2 \in [0,1]$ pour $x \in [0,1]$ (et en utilisant la formule intégrale définissant R). D'où la positivité voulue.
On a vu en cours que le spectre de T vérifie $\sigma(T) \subset [-|||T|||, |||T|||] \subset [-2,2]$ pour un opérateur autoadjoint. en plus pour l'opérateur positif $T+1$, on a vu en cours/TD $\sigma(T+1) \subset [0,+\infty[$. Ceci se retraduit en $\sigma(T) \subset [-1,+\infty[$, d'où le résultat en prenant l'intersection :$\sigma(T) \subset [-1,2]$.
9. Pour voir que pour $\lambda \in]0,1[$, montrer que $T-\lambda$ est inversible dans $B(H)$ il suffit de voir que $(T-1/2)^2 - 1/4$ positif car alors le spectre de $\sigma((T-1/2)^2) = g(\sigma(T)) \subset [1/4,\infty[$ avec $g(x) = (x-1/2)^2$ et g envoie $]0,1[$sur $]0,1/4[$ ce qui implique donc que l'ensemble résolvant $\sigma(T)^c \supset]0,1[$.

Or

$$\begin{aligned}\langle (T-1/2)^2 x, x\rangle &= \langle (R+3/2)^2 P(x), P(x)\rangle + \langle (R+1/2)^2(1-P)(x), (1-P)(x)\rangle \\ &\geq \langle (3/2)^2 P(x), P(x)\rangle + \langle (1/2)^2(1-P)(x), (1-P)(x)\rangle \geq 1/4||x||_2^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé R, R^2 opérateurs positifs. C'est l'inégalité voulue de positivité.

10. Soit $h(x,y) = y - 1/2$ vu comme $h \in H$ et $\epsilon > 0$. $(i\epsilon - T)^{-1}$ existe dans $B(H)$ car $i\epsilon \notin \sigma(T) \subset [-1,2]$ que On remarque $Ph = 0$ vu $\int_0^1 ydy = 1/2$, donc $Th = -Rh$ d'où $(i\epsilon - T)^{-1}h(x,y) = (i\epsilon + x^2)^{-1}h(x,y)$ vu $(i\epsilon - T)(i\epsilon + x^2)^{-1}h(x,y) = (i\epsilon + x^2)^{-1}(i\epsilon - T)h(x,y) = h(x,y)$.
Calculons

$$||(i\epsilon - T)^{-1}h||_2^2 = \int_0^1 dx(|i\epsilon - x^2|)^{-2} \int_0^1 dy|y-1/2|^2 = \int_0^1 dx(\epsilon^2 + x^4)^{-1} \int_0^1 dy|y-1/2|^2$$

et par convergence monotone cela tend vers

$$||(i\epsilon - T)^{-1}h||_2^2 \to_{\epsilon\to 0} \int_0^1 dx(x^{-4} \int_0^1 dy|y-1/2|^2 = +\infty.$$

(l'égalité vient des intégrales de Riemann par exemple). Or par l'absurde, si on avait $0 \notin \sigma(T)$, on a vu en cours que les résolvants sont continues (en norme d'opérateur) sur l'ensemble résolvant donc on aurait $||(i\epsilon - T)^{-1}h||_2^2 \to_{\epsilon\to 0} ||(-T)^{-1}h||_2^2 < \infty$ ce qui n'est pas le cas.

11. **(Bonus : 2 points)** En combinant les questions 7,8 on a $\sigma(T) \subset [-1,0] \cup [1,2]$. Et donc on raisonne comme pour $0 \in \sigma(T)$. On a pour $\lambda \in [-1,0]$ par le même calcul et encore convergence monotone

$$||(\lambda + i\epsilon - T)^{-1}h||_2^2 = \int_0^1 dx(\epsilon^2 + (\lambda + x^2)^2)^{-1} \int_0^1 dy|y-1/2|^2 \to_{\epsilon\to 0} \int_0^1 dx(\lambda + x^2)^{-2} \int_0^1 dy|y-1/2|^2$$

Comme $\lambda \in [-1,0]$ l'intégrale diverge au point $\sqrt{-\lambda}$ ce qui conclut ce cas comme précédemment en utilisant la continuité en λ sur l'ensemble résolvant. Le cas $x \geq 1$ est similaire mais nécéssite de remplacer h par $k = 1$ qui vérifie $Tk = (2-R)k$ vu $Pk = k$ donc $(\lambda + i\epsilon - T)^{-1}k(x,y) = (\lambda - 2 + i\epsilon + x^2)^{-1}k(x,y)$ donc

$$||(\lambda + i\epsilon - T)^{-1}k||_2^2 = \int_0^1 dx(\epsilon^2 + (\lambda - 2 + x^2)^2)^{-1} \to_{\epsilon\to 0} \int_0^1 dx(\lambda - 2 + x^2)^{-2}$$

Comme $\lambda \in [1,2], \lambda - 2 \in [-1,0]$ l'intégrale diverge au point $\sqrt{-(\lambda-2)}$ comme avant, ce qui conclut ce cas comme précédemment en utilisant la continuité en λ sur l'ensemble résolvant

12. Parmi P, R, T, lesquels sont des opérateurs compacts ? Aucun. En effet, on vient de voir que $\sigma(T)$ n'est pas dénombrable, donc par le théorème spectral du cours, T ne peut pas être compact. De même, le même calcul donne $\sigma(R) = [0,1]$ et la même raison conclut. Enfin, si P était compact alors $Ker(1-P) = Im(P)$ serait de dimension fini par le théorème de compacité de Riesz car sa boule unité serait compacte. Or ce n'est pas le cas car car $Im(P)$ est isométrique à $L^2([0,1])$ (par l'inclusion comme fonction constante de la deuxième variable), et on vu en TD une base infinie de cet espace (la base de Walsh) (on peut aussi rapeller que les x^n forment une famille libre infinie vue l'injection des polynômes).

13. **(Bonus : 1 points)** ON pose $g(x) = (2x-1)^{-1}$ qui est continue sur $\sigma(T) = [-1, 0] \cup [1, 2]$. Par le théorème spectral $\sigma((2T-1)^{-1}) = g(\sigma(T))$ Or $2\sigma(T) - 1 = [-3, -1] \cup [1, 3]$, donc $\sigma((2T-1)^{-1}) = [-1, -1/3] \cup [1/3, 1]$ et par la formule de rayon spectrale vu $(2X-1)^{-1}$ autoadjoint
$$|||(2X-1)^{-1}||| = \sup\{|z| : z \in [-1, -1/3] \cup [1/3, 1]\} = 1.$$

Problème 2 (10 points)

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et $1 < p < \infty$, q l'exposant conjugué de p tel que $1/p + 1/q = 1$.

On considère $E = L^p([0, 1], \lambda)$ l'espace de Banach des (classes d'équivalence à égalité presque partout près de) fonctions mesurables $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de puissance p-ème intégrable avec sa norme usuelle :
$$||f||_p^p = \int_{[0,1]} |f(x)|^p d\lambda(x).$$
De même, on note $F = L^q([0, 1], \lambda)$.

On définit les ensembles
$$C = \{g \in E \ : \ ||g||_1 \leq 1 \ \}$$
et
$$K = \{f \in F \ : \ |f(x)| \leq 1 \ p.p.\}.$$
On pose pour $x \in E$
$$M(f)(x) = xf(x).$$

1. On a $E \subset L^1([0, 1])$ par l'inégalité de Holder appliqué à f et 1 qui donne : $||f1||_1 \leq ||f||_p ||1||_q < \infty$ vu $||1||_q = (\int_0^1 1)^{1/q} = 1$.
   La linéarité de l'inclusion donne une application linéaire continue $I : E \to L^1([0, 1], \lambda)$ car l'inégalité précédente montre que l'application est bornée sur la boule unité et on déduit même $|||I||| \leq 1$.
2. Par restriction, de la norme de $L^1([0, 1])$, $||f||_1 = \int_{[0,1]} |f(x)|d\lambda(x)$ est une norme sur E (le seul point à préciser est que I est bien une application injective pour assurer la séparation, à dire ici si on ne l'a pas vérifié au 1, ici car dans les deux espaces la nullité est l'annulation presque partout ; la composée d'une norme avec une application linéaire injective est une norme). Pour la non-équivalence à la norme $||.||_p$, on propose 2 méthodes :
   méthode 1 : Par l'absurde, si les normes étaient équivalente, $(E, ||.||_1)$ serait complet (même suites de Cauchy et suites convergentes pour des normes équivalentes) car $(E, ||.||_p)$ est complet par le Thm du cours. Or un espace complet d'un espace séparé est fermé, donc $I(E)$ serait fermé dans $L^1([0, 1])$. Or ce n'est pas le cas car il est dense dans $L^1([0, 1])$ (par exemple il contient $C^0([0, 1])$ ou bien les fonctions étagées qu'on on a vu en cours être denses dans tous les L^p $p < \infty$.) Si il était fermé, les deux espaces seraient égaux, ce qui n'est pas le cas car $1/x^{1/p} \in L^1([0, 1]) - L^p([0, 1])$ l'intégrale de Riemann.
   méthode 2 : on prend un exemple explicite de suite $f_n(x) = x^n$, $||f_n||_1 = 1/(n + 1)$, $||f_n||_p^p = \int_0^1 x^{np} dx = 1/(np+1)$ et $||f_n||_1/||f_n||_p \sim p^{1/p} n^{1/p-1} \to_{n\to\infty} 0$. On n'a donc pas de $c > 0$ tel que $||f_n||_1 \geq c||f_n||_p$ donc les normes ne sont pas équivalentes.
3. Montrons que $(E, ||.||_1)$ n'est pas complet.
   Par absurde, si il était complet, $Id : (E, ||.||_p) \to (E, ||.||_1)$ serait une application linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach, donc par le théorème de l'application ouverte,

l'inverse serait continue, c'est-à-dire les deux normes équivalentes, ce qui contredit la question précédente.

4. Montrons que $M \in L(E,E)$ l'espace des applications linéaires continues. Montrer que sa norme subordonnée est $|||M||| = 1$. D'abord la multiplication est clairement linéaire. Ensuite $||M(f)||_p^p = \int_0^1 x^p |f(x)|^p dx \leq \int_0^1 |f(x)|^p dx = ||f||_p^p$ vu $x^p \leq 1$ sur l'intervalle d'intégration. Donc M est bornée sur la borne unité donc continue et $|||M||| \leq 1$.

   Réciproquement, soit $f_\epsilon = 1_{[1-\epsilon,1]}$, $||M(f_\epsilon)||_p^p = \int_{1-\epsilon}^1 x^p dx = (1-(1-\epsilon)^{p+1})/(p+1)$ $||f_\epsilon||_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p dx = \epsilon$. Enfin on obtient l'inégalité qui conclut (en identifiant la formule de la dérivée dans la limite considérée) :

$$|||M||| \geq ||M(f_\epsilon)||_p / ||f_\epsilon||_p \rightarrow_{\epsilon \to 0} [\frac{d}{dx}(\frac{x^{p+1}}{p+1})]_{x=1} = 1.$$

5. Montrons que $(M + Id_E)$ est inversible et que $(M + Id_E)^{-1} \in L(E,E)$.

   On écrit $1 = Id_E$. $(M+1)(f)(x) = (x+1)f(x) = g$ donne l'unique solution possible pour l'inverse $(M+1)^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{x+1}$. Il faut voir que cette solution est bien dans E. Or $|\frac{g(x)}{x+1}| \leq |g(x)|$ donc par domination $(M+1)^{-1}g(x) \in L^p$. POur conclure on voit soit en intégrant cette relation que $(M+1)^{-1}$ est une contraction, soit on utilise le théorème de l'application ouverte pour dire que l'inverse d'une application linéaire bijective continue (par la question précédente) entre espaces de Banach comme E est automatiquement continue.

6. Le théorème de représentation de Riesz identifie le dual de E à F par l'application $T : F \to E'$ donnée par

$$T(f)(e) = \int_0^1 f(x)e(x)dx.$$

7. Montrons que C est convexe fermé. C est l'intersection de la boule unité de L^1 (donc convexe comme toutes les boules) avec E (sev), donc est bien convexe.

   Comme par 1, $g = || \cdot ||_1$ est continue (par l'inégalité triangulaire inverse elle est 1-lipschitz pour $||\cdot||_1$ donc pour $||\cdot||_p$ par l'inégalité du 1) et $C = g^{-1}([0,1])$ est l'image inverse d'un fermé par une application continue, donc C est fermé.

8. Montrons qu'on a la description alternative :

$$K = \{g \in F : \forall f \in C : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \leq 1\}.$$

   On raisonne par double inclusion. Pour $\subset$, $\int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \leq ||g||_\infty ||f||_1$ par Holder et $||g||_\infty \leq 1$ par definition du sup essentielle pour $g \in K$. $||f||_1 \leq 1$ pour $f \in C$ d'où l'inclusion voulue.

   Réciproquement, on utilise la formule du cours (utilisée dans la preuve du dual isométrique de L^1, on peut aussi utiliser la preuve de cette formule en revenat à la définition du sup essentiel) pour $g \in F$:

$$\begin{aligned} ||g||_\infty &= \sup\{\int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) : ||f||_1 \leq 1, fg \in L^1, f \in L^1 \cap L^\infty\} \\ &= \sup\{\int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) : ||f||_1 \leq 1, f \in L^1 \cap L^\infty\}. \end{aligned}$$

car si $f \in L^1 \cap L^\infty$ on a $f \in E$ par Holder donc $gf \in L^1$. Mais comme l'ensemble des f sur lequel on prend le sup est inclus dans C, on déduit par l'hypothèse $||g||_\infty \leq 1$ soit $g \in K$. Enfin

$$K = \cap_{f\in C}\{g \in F : \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x) \leq 1\}.$$

est une intersection de demi-espaces fermés (vu que $g \mapsto \int_{[0,1]} g(x)f(x)d\lambda(x)$ est une forme linéaire continue sur F comme $f \in E$), donc intersection de convexes fermés, c'est donc un un convexe fermé de $F = L^q([0,1], \lambda)$.

9. Dans le cas $p = q = 2$. Montrons que la projection sur le convexe fermé K est donnée par la formule $P_K(g) = \max(\min(g, 1), -1)$. On utilise la caractérisation du cours. D'abord $P_K(g) \in K$ car on a assuré que le min soit plus grand que -1, le max plus petit que 1 donc à valeur dans [0,1]. IL faut voir que pour tout $k \in K$:$\langle g - P_K(g), k - P_K(g)\rangle \leq 0$ pour conclure que la formule est la bonne. Or

$$\begin{aligned}\langle g - P_K(g), k - P_K(g)\rangle &= \int_0^1 (g - \max(\min(g, 1), -1))(k - \max(\min(g, 1), -1)) \\ &= \int_{|g|\leq 1} 0(g - k) + \int_{g\geq 1} (g - 1)(k - 1) + \int_{g\leq -1} (g + 1)(k + 1) \leq 0\end{aligned}$$

où l'inégalité vient de $k - 1 \leq 0$ p.p, $g - 1 \geq 0$ sur le premier ensemble d'intégration d'où négativité de la première intégrale. et de même on a toujours $k + 1 \geq 0$ p.p. pour $k \in K$ et $g + 1 \leq 0$ sur le deuxième ensemble.

10. Montrons que pour tout $g \in F$, il existe un $y \in K$ atteignant le minimum de

$$F_q(c) = ||g - c||_q^q$$

sur K, c'est-à-dire :

$$||g - y||_q^q = \inf_{k\in K} ||g - k||_q^q.$$

On applique le théorème 104 du cours à F qui est un espace réflexif (vu le calcul des duaux L^p, L^q, le bidual est lui-même vu $1 < p < \infty$. Si on a une fonction convexe continu coercive alors elle atteint son mimunum sur une convexe fermé de l'espace réflexif F. $||g - k||_q \to_{||k||_q\to\infty} \infty$ par l'inégalité triangulaire inverse donc la fonction $k \mapsto ||g - k||_q$ est coercive (on peut aussi s'en passer car le convexe de minimisation est borné). Elle est continue (de même par inégalité triangulaire inverse), convexe comme composée d'une application affine et d'une norme. Donc vu K convexe fermé, le théorème s'applique et donne un $y \in K$ avec

$$||g - y||_q = \inf_{k\in K} ||g - k||_q.$$

Comme la puissance est une bijection croissante, cela donne l'existence du y demandé.