Cours d'Analyse MG1 : semestre d'automne 2016

Yoann Dabrowski

12 septembre 2016

Chapitre 0

Espaces Vectoriels Normés

1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels

Dans tout le cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (le corps des nombres réels) ou $\mathbb{C}$ (le corps des nombres complexes). $|\lambda|$ est la valeur absolue ou le module de $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble muni de deux lois notées $+$ et $\cdot$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si :

a $+$ est une loi de composition interne $+ : E \times E \to E$ tel que $(E, +)$ est un groupe abélien, c'est-à-dire :
  - i $+$ est associative $\forall x, y, z \in E, x + (y + z) = (x + y) + z$
  - ii $+$ est commutative $\forall x, y \in E, x + y = y + x$
  - iii il existe un élément neutre 0 : $0 + x = x$
  - iv tout x admet un opposé $(-x)$ unique tel que $x + (-x) = 0$

b $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ est une loi externe, telle que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall x, y \in E$:
  - i $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  - ii $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
  - iii $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - iv $(1 \cdot x) = x$

On note $\lambda \cdot x = \lambda x$

1.2 Norme sur un espace vectoriel

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Une **norme** sur E est une application $n : E \to [0, +\infty[$ telle que :

i $\forall x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}\ n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ (homogénéité)

ii $\forall x, y \in E\ n(x + y) \leq n(x) + n(y)$ (inégalité triangulaire ou sous-additivité)

iii $\forall x \in E\ n(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)

Souvent on note $n(x) = ||x||$, sauf dans l'exemple $E = \mathbb{K}, n(x) = |x|$. Un couple $(E, ||.||)$ est appelé espace vectoriel normé (evn). Si seulement (i)-(ii) sont vérifiés, on parle de **semi-norme**.

On note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r, $B_F(a, r)$ la boule fermée. $Int(A)$ et $\overline{A}$ l'intérieur et l'adhérence de A.

Définition 3. Une partie A de E, e.v.n., est dite *complète* si toute suite de Cauchy de A converge dans A. Si E est complet on dit que c'est un *espace de Banach.*

Proposition 1. *(Inégalité triangulaire inverse) Soit* $(E, ||.||)$ *un evn.*

$$\forall x, y \in E \Big| \ \|x\| - \|y\| \ \Big| \leq ||x - y||$$

.

Démonstration. Cas $||x|| \geq ||y||$: Comme $||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$ par l'inégalité triangulaire, on en déduit $\Big| \ \|x\| - \|y\| \ \Big| = \|x\| - \|y\| \leq ||x - y||$.

Dans le cas $||y|| \geq ||x||$, on échange x et y par symétrie. □

Proposition 2. *Un evn E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Si E est complet et (x_i) est absolument convergente, la suite des sommes partielles $S_p = \sum_{i=1}^{p} x_i$ vérifie, pour $q > p$, $||S_p - S_q|| \leq \sum_{k=p}^{q-1} ||x_i||$ donc comme $\sum_{k=1}^{q} ||x_i||$ est convergente donc de Cauchy, on déduit que (S_p) est de Cauchy donc converge.

Réciproquement, si toute suite absolument convergente converge, soit (x_i) une suite de Cauchy. Il suffit de montrer qu'elle admet une sous-suite convergente pour voir qu'elle converge. Par la propriété de Cauchy, on trouve par induction $||x_{n_{k+1}}||$ avec $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| \leq \frac{1}{2^k}$ de sorte que la série télescopique $\sum x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est absolument convergente donc converge, et donc la sous-suite (x_{n_k}) converge. □

2 Exemples

Exemple 1. Si $E = \mathbb{R}^n$ on a les normes classiques, si $X = (x_1, ..., x_n)$ $p \in [1, \infty[$:

$$||X||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$$

$$||X||_\infty = \max_{i=1...n} |x_i|.$$

On remarquera que pour $p < 1$ la formule de $||X||_p$ ne donne pas une norme, par exemple $||(1,1)||_{1/2} = 2^2 = 4 > ||(1,0)||_{1/2} + ||(0,1)||_{1/2} = 2$ ce qui viole l'inégalité triangulaire.

Exemple 2. Si $G = E \times F$ avec $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ des evn. On définit : $||(x,y)||_\infty = max(||x||_E, ||y||_F)$. C'est une norme sur G (exo) appelée norme produit ou norme somme directe $\oplus^\infty$.

On note $G = E \oplus_\infty F$.

Exemple 3. Si $G = E \times F$ avec $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ des evn $1 \leq p < \infty$. On définit : $||(x,y)||_p^p = ||x||_E^p + ||y||_F^p$. C'est une norme sur G (exo) appelée norme somme directe $\oplus^p$ (ou norme coproduit dans le cas $p = 1$). On note $G = E \oplus_p F$.

Exemple 4. Si $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, on a les normes :

$$||f||_p^p = \int_a^b |f(t)|^p dt,$$

$$||f||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

Cette dernière norme est la norme de la convergence uniforme.

Exemple 5. $c_0(I)$ est l'ensemble des suites $(x_i)_{i\in I}$ qui tendent vers 0 dans le sens où si $\epsilon > 0$, il existe une partie F finie telle que $|x_i| \le \epsilon$ pour tout $i \notin F$. On munit $c_0(I)$ de la norme sup :

$$||x||_\infty = \sup_{i\in I} |x_i| < \infty.$$

$\ell^\infty(I)$ est l'ensemble des suites bornée $(x_i)_{i\in I}$ avec la même norme $||x||_\infty$.

Exemple 6. $\ell^1(I)$ est l'ensemble des suites $(x_i)_{i\in I}$ sommables, tel qu'il existe une constante C, tel que pour toute partie F finie telle que $\sum_{i\in F} |x_i| \le C$. On munit $\ell^1(I)$ de la norme :

$$||x||_1 = \sup_F \sum_{i\in F} |x_i| =: \sum_{i\in I} |x_i| < \infty.$$

3 Normes équivalentes

Définition 4. Soit E un e.v. deux normes n_1 et n_2 sur E sont dites *équivalentes* si

$$\exists c, C > 0, \forall x \in E, \quad cn_1(x) \le n_2(x) \le Cn_1(x).$$

On note alors $n_1 \sim n_2$.

Remarque 1. L'équivalence des normes est une relation d'équivalence, c'est à dire qu'elle est réflexive ($n_1 \sim n_1$), symétrique ($n_1 \sim n_2 \Rightarrow n_2 \sim n_1$) et transitive ($n_1 \sim n_2, n_2 \sim n_3 \Rightarrow n_1 \sim n_3$). Si deux normes sont équivalentes les notions d'analyses (limite, continuité, ...) sont les mêmes pour les deux normes.

Exemple 7. Dans $\mathbb{R}^n$, $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ sont équivalentes, comme toutes les normes en dimension finie.

Exemple 8. Dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$, $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ ne sont PAS équivalentes. Soit par exemple $u_n(x) = x^n$. u_n converge simplement vers une fonction non-continue donc ne converge pas uniformément (pour $||.||_\infty$) mais $||u_n||_1 = \frac{1}{n+1}, ||u_n||_2^2 = \frac{1}{2n+1} \to 0$ donc aucune de ces normes ne sont équivalents à la norme uniforme ($||u_n||_\infty = 1$). De plus $\frac{||u_n||_1}{||u_n||_2} \to 0$ donc les normes $||.||_1, ||.||_2$ ne sont pas non plus équivalentes.

4 Applications linéaires continues

On considère $(E, ||.||)$ et $(F, ||.||)$ deux evn.

Définition 5. Soit $A \subset E$, une application $f : A \to F$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in A^2, ||x-y|| \le \eta \Rightarrow ||f(x)-f(y)|| \le \epsilon.$$

Une application $f : A \to F$ est *α-Höldérienne* avec $\alpha \in]0,1]$ si il existe une constante $C > 0$:

$$\forall (x,y) \in A^2, ||f(x)-f(y)|| \le C||x-y||^\alpha.$$

Une application $f : A \to F$ est *K-lipschitzienne* avec $K \in [0,+\infty[$ si :

$$\forall (x,y) \in A^2, ||f(x)-f(y)|| \le K||x-y||.$$

Rappel 2. Une application $u : E \to F$ est dite *linéaire* si :

(i) $\forall x, y \in E, u(x+y) = u(x) + u(y)$

(ii) $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Proposition 3. *Si $u : E \to F$ est une application linéaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est lipschitzienne.*
2. *u est continue.*
3. *u est continue en 0.*
4. *u est continue en un point.*
5. *Il existe $a \in E$,$\eta > 0$ tel que $u(B(a,\eta)) \subset B(u(a), 1)$.*
6. *u est bornée sur la boule unité : Il existe $M < \infty$ telle que, si $||x|| \leq 1$ alors*

$$||u(x)|| \leq M.$$

Démonstration. 1. ⇒ 2., 2. ⇒ 3.,3. ⇒ 4.,4. ⇒ 5. sont évidentes. Si on suppose 5. pour montrer 1., il existe $\eta > 0$ tel que si $||x-a|| \leq \eta$ alors $||u(x) - u(a)|| \leq 1$. Soit $h \in E$, $x = a + h\eta/||h||$ de sorte que $||x - a|| \leq \eta$, on déduit donc $||u(h)||\eta/||h|| = ||u(x-a)|| \leq 1$ c'est-à-dire $||u(h)|| \leq ||h||/\eta$ et donc pour tout x, y en utilisant encore la linéarité $u(x-y) = u(x) - u(y)$, on obtient :

$$||u(x) - u(y)|| \leq \frac{1}{\eta}||x - y||,$$

donc u est $1/\eta$ lipschitzienne.

1. implique 6. et comme $||u(x)-u(y)|| = ||u(x-y)|| \leq M||x-y||$ en appliquant 6 à $(x-y)/||x-y||$, on déduit 1. de cela. □

Exemple 9. Soit $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ des evn. On note $G = L(E,F) = B(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \to F$. On définit la norme subordonnée :

$$|||u||| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F.$$

C'est une norme sur G (exo).

Exemple 10. Dans le cas $E = F = \ell^2(I) =: H$ on obtient l'exemple important $B(H) = L(\ell^2(I); \ell^2(I))$ des opérateurs bornés (autre nom des applications linéaires continues) sur l'espace de Hilbert H.

Proposition 4. *Si $\phi : E \to \mathbb{K}$ est une application linéaire (forme linéaire), ϕ est continue si et seulement si son noyau $H = \operatorname{Ker} \phi = \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé.*

Démonstration. Si ϕ est continue, $\phi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image inverse d'un singleton, qui est fermé. Réciproquement, supposons ϕ non nulle, soit e tel que $\phi(e) = 1$. Comme le complémentaire de H est ouvert soit $r > 0$ tel que $B(e,r) \subset H^c$.

Montrons par l'absurde que pour tout $x \in B(e,r)$, $\phi(x) \in B(1,1)$. En effet, sinon soit x avec $|\phi(x)-1| \geq 1$. Si $t = -\phi(x)/(1-\phi(x))$, on $\phi(te+(1-t)x) = t1+(1-t)\phi(x) = t(1-\phi(x))+\phi(x) = 0$. Or $||te + (1-t)x - e|| = |1-t|||x-e|| = ||x-e||/|\phi(x)-1| \leq r$ une contradiction car alors $y = te + (1-t)x \in B(e,r) \cap H$.

On a donc vu $\phi(B(e,r)) \subset B(\phi(e), 1)$ d'où ϕ continue par la proposition précédente.

□

Définition 6. Une application linéaire $u : E \to F$ est dite **contractante** (resp. strictement contractante) si elle est *1-lipschitzienne* (resp k-lipschitzienne avec $k < 1$) soit :

$$\forall x \in E, ||u(x)|| \leq ||x||, \ (resp. \ ||u(x)|| \leq k||x||).$$

Une application linéaire $u : E \to F$ est une **isométrie** si :

$$\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||.$$

Proposition 5. *Une isométrie est toujours injective.*

Une isométrie $u : E \to F$ identifie donc E au sous-espace vectoriel $u(E) \subset F$ avec la norme induite.

Démonstration. Si $u(x) = 0$ alors $0 = ||u(x)|| = ||x||$ donc par séparation $x = 0$. □

5 Espace dual

Définition 7. L'espace $E' := L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur un e.v.n. E est munie de la norme d'opérateur

$$||f||_{E'} := \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} |f(x)|.$$

Proposition 6.

$$(\ell^1(I))' \simeq \ell^\infty(I).$$

Démonstration. On définit $T : \ell^\infty(I) \to (\ell^1(I))'$ par :

$$T((u_i))[(v_i)] = \sum_{i \in I} u_i v_i.$$

Bien sûr, on a l'inégalité montrant que T est bien défini et contractant :

$$|T((u_i))[(v_i)]| \leq \sum_{i \in I} |u_i| \ |v_i| \leq \|v\|_\infty \sum_{i \in I} |u_i|.$$

Montrons que T est surjectif. Soit $f \in (\ell^1(I))'$ et e_i la suite valant 1 en i et 0 ailleurs. Soit $u_i = f(e_i)$, alors $|u_i| \leq ||f||_{\ell^1}$ donc $(u_i) \in \ell^\infty(I)$, montrons que $f = T((u_i))$.

En effet, si v est à support fini, $f(v) = T((u_i))(v)$ par linéarité mais comme les deux côtés sont continus en v et que (par définition) les suites à support fini sont denses dans $\ell^1(I)$, on obtient $f = T((u_i))$.

Montrons que T est isométrique. Mais $||T(u_i)|| \geq |T(u_i)(e_i)| = |u_i|$ donc $||T(u_i)|| \geq ||(u_i)||_{\ell^\infty(I)}$ et on obtient donc l'égalité.

□

6 Rappels des propriétés particulières des evn de dimension finie.

6.1 Complétude (Preuves facultatives)

Théorème 7. *Tout evn de dimension finie est complet.*

Démonstration. C'est évident en dimension 1. On montre donc le résultat par récurrence sur la dimension. On suppose donc le résultat acquis en dimension strictement inférieure à n, soit $(E, ||.||)$ de dimension n. Soit ϕ une forme linéaire non nulle sur E, son noyau F est de dimension $(n-1)$, donc par hypothèse de récurrence $(F, ||.||)$ (muni de la restriction de la norme de E) est complet. Par conséquent F est fermé dans E, donc ϕ est continue.

Soit $e \in E$ avec $\phi(e) = 1$. L'isomorphisme linéaire $u : (\lambda, f) \to \lambda e + f$ de $\mathbb{K} \times F$ (avec la norme produit donc complet par la proposition 6) sur E est continue (2-lipschitzien). Son isomorphisme réciproque est donné par :

$$\forall x \in E, \quad u^{-1}(x) = (\phi(x), x - \phi(x)e).$$

u^{-1} est donc aussi continue comme ϕ. u étant lipschitzienne (car linéaire continue), si (x_n), suite de E, est de Cauchy $u(x_n)$ l'est aussi donc converge par complétude de $\mathbb{K} \times F$, d'où $x_n = u^{-1}(u(x_n))$ converge aussi par continuité de u^{-1}. □

6.2 Applications linéaires

Rappel 3. Si E de dimension n et F de dimension p. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $(f_1, ..., f_p)$ une base de F. Une application linéaire u est décrite par sa matrice $A = (a_{ij})_{i\in[1,p], j\in[1,n]}$ dans ces bases. Alors, si $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $y = u(x) = \sum_{i=1}^p y_i f_i$, on rappelle que :

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

On définit aussi la base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$ de l'ev des formes linéaires sur E caractérisée par $e_j^*(e_k) = 1$ si $j = k$ et 0 sinon. En conséquence, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^n e_j^*(x) u(e_j).$$

Théorème 8. *Toute application linéaire entre evn de dimensions finies est continue (et même lipschitzienne).*

Démonstration. En utilisant la représentation du rappel

$$u = \sum_{i=1}^n u(e_i) e_i^*,$$

il suffit de montrer que les formes linéaires e_i^* sont continues. Mais $\operatorname{Ker} e_i^*$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc complet (Théorème 7), donc fermé dans E, d'où la continuité voulue (proposition 4). La lipschitzianité vient de la proposition 3. □

6.3 Équivalence des normes et conséquences.

Théorème 9. *Toutes les normes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes.*

Démonstration. Si $||.||_1$, et $||.||_2$ sont deux normes sur E. l'application linéaire identité $u = Id_E$ vu de $(E, ||.||_1)$ vers $(E, ||.||_2)$ est continue ainsi que son inverse u^{-1} (théorème 8), donc elles sont C et $1/c$-lipschitzienne respectivement (proposition 3). On en déduit, pour tout $x \in E$:

$$||x||_2 = ||u(x) - u(0)||_2 \leq C||x||_1,$$
$$||x||_1 = ||u^{-1}(x) - u^{-1}(0)||_1 \leq \frac{1}{c}||x||_2,$$

d'où l'équivalence des normes souhaitée. □

6.4 Compacité

Théorème 10. *[de Compacité de F. Riesz] Soit E un e.v.n. la boule unité fermée de E est compacte (pour la topologie de la norme) si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Si E est de dimension, finie, toutes les normes sont équivalentes, donc on peut prendre la norme $||.||_\infty$, une suite bornée les suites coordonnées sont bornées, et on extrait successivement des sous-suites pour que chaque coordonnée converge (cas réel), donc on a convergence pour $||.||_\infty$. Réciproquement, si la boule unité de E est compact, elle admet un 1/2-recouvrement par des boules dont les centres engendrent un sev Y de dimension finie de sorte que $B_F(0,1) \subset Y + B_F(0,1)/2$ et par récurrence, $B_F(0,1) \subset Y + B_F(0,1)/2^n$ et donc comme Y est complet donc fermé, $B_F(0,1) \subset Y$ et donc $E \subset Y$ par homogénéité. E est donc de dimension finie. □

Remarque 4. Pour retrouver des compacts en dimension infinie, on peut se restreindre à des ensembles plus petits que les fermés bornés (Th d'Ascoli), quitter les e.v.n. (par ex espaces $C^\infty(\Omega)$), ou chercher des topologies plus faibles que celle de la norme. On étudiera plus ce dernier point dans ce cours.

7 Intégrale de Riemann à valeur Espace de Banach

Nous référons par exemple au Gourdon d'Analyse pour cette section. Soit F un evn complet. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On définit $E = \mathcal{CM}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur A à valeur F.

C'est un Evn pour la norme de la convergence uniforme, si $f \in E$:

$$||f||_E = \sup_{t \in A} ||f(t)||_F.$$

On va utiliser le théorème suivant de prolongement des applications linéaires continues pour définir l'intégrale à valeur dans F.

Proposition 11. *Toute application linéaire continue u d'un sous-espace vectoriel dense D d'un evn E vers un evn complet F se prolonge en une unique application linéaire continue $v : E \to F$, ayant la même constante de lipschitzianité que u.*

Démonstration. Soit $x \in E$, et par densité $x_n \in D$, $x_n \to x$. Comme u est continue donc K-lipschitzienne (par proposition 3), $u(x_n)$ est de Cauchy, donc converge vers $z \in F$ par complétude.

Soit $y_n \to x$ une autre telle suite, alors $||u(y_n)-z|| \leq ||u(x_n)-u(y_n)||+||u(x_n)-z|| \leq K||x_n-y_n||+||u(x_n)-z|| \to 0$. Donc la limite z ne dépend pas de la suite choisie. On pose $v(x) = z$. En particulier, v étend u (en considérant la suite constante). Si $x_n \to x, y_n \to y$ en passant à la limite dans la relation $u(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha u(x_n) + \beta u(y_n)$, on déduit que v est linéaire et avec $||u(x_n - y_n)|| \leq K||x_n - y_n||$, on déduit que v est K-lipschitzienne. Par densité de D on déduit l'unicité de v. □

Soit ϕ une fonction en escalier de $\phi : [a, b] \to F$ evn complet, c'est à dire qu'il existe une suite $a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b$ telle que $\phi(x) = c_{i-1}$ pour $x \in [a_{i-1}, a_i)$. On définit $I(\phi) = \int_{[a,b]} \phi(t)dt = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\phi(a_{i-1})$. I est une application linéaire continue, car par l'inégalité triangulaire

$$||I(\phi)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}|||\phi(a_{i-1})||_F \leq ||\phi||_E|b - a|.$$

Comme les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues par morceaux, la proposition précédente permet d'étendre l'intégrale comme quand $F = \mathbb{R}$ et on a :

Définition 8. L'intégrale des fonctions continues par morceaux $\mathcal{C}M(A, F)$ est l'unique prolongement linéaire continu de l'intégrale des fonctions en escaliers, noté $\int_a^b dt f(t) = \int_a^b f(t)dt$.

Proposition 12. *(Inégalité triangulaire)* $|| \int_a^b dt f(t)||_F \leq \int_a^b dt||f(t)||_F$.

Démonstration.

$$||I(\phi)||_F \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}|||\phi(a_{i-1})||_F = \int_a^b ||\phi(t)||_F dt$$

pour ϕ en escalier et on prolonge par continuité. □

On a toutes les propriétés usuelles, Chasles, linéarité, en particulier si $F = \mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, ..., f_n)$ $\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b f_1(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt)$.

Chapitre 1

Intégration, Convolution, Définition des Espaces L^p

1 Rappels d'intégration abstraite

On pourra se reporter au chapitre 1 d'*Analyse réelle et complexe* de Walter Rudin. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ($\mathcal{T}$ la tribu, μ la mesure). **Pour simplifier, on utilise toujours des espaces mesurés σ-finis, c'est-à-dire avec une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\cup_n A_n = \Omega$ et $\mu(A_n) < \infty$.**

Exemple 11 (mesure de comptage). $\Omega = \mathbb{N}$, avec la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. $\mu(A) = Card(A)$ définit une mesure σ-finie.

Exemple 12 (mesure de Lebesgue). $\Omega = \mathbb{R}^d$, avec la tribu $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties boréliennes de Ω. C'est la plus petite tribu contenant les ensembles ouverts. On suppose connue la mesure de Lebesgue *Leb* l'unique mesure définie sur $\mathcal{B}$, finie sur les compacts et invariante par translation sur $\mathbb{R}^d$, unique à une constante multiplicative près fixé par $Leb([0,1]^d) = 1$. (cf. Rudin Th 2.20 p 59). On note $dLeb(x)$ simplement par dx

Exemple 13 (mesure de probabilité). Si $\mu(\Omega) = 1$ on parle de mesure de probabilité. (a fortiori elle est σ-finie.)

Vous avez vu durant le cours d'intégration, les espaces des fonctions intégrables

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int |X| d\mu < \infty\}.$$

$L^1(\Omega, \mu) = L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ l'espaces des classes d'équivalence pour l'égalité presque partout (*p.p.*) de fonctions intégrables.

On rappelle aussi le résultat de base crucial de théorie de la mesure :

Proposition 13. *Soit $X, Y \in L^1(\Omega, \mu)$, (Ω, μ) est un espace mesuré σ-fini.*

1. $X \leq Y \Rightarrow \int X d\mu \leq \int Y d\mu$ *. En particulier,* $X \geq 0 \Rightarrow \int X d\mu \geq 0$.
2. $|Z| \leq |X|$ *et* Z *mesurable implique* $Z \in L^1(\Omega, \mu)$.
3. $|\int X d\mu| \leq \int |X| d\mu$.
4. *(Convergence monotone TCM) Si* $X_n \geq 0$, X_n *suite croissante de fonctions mesurables qui tend simplement vers* X *alors* $\int X_n d\mu \to \int X d\mu$.
5. *(Lemme de Fatou) Si* $X_n \geq 0$ *mesurable, alors* $\liminf X_n$ *est mesurable et* $\int \liminf X_n d\mu \leq \liminf \int X_n d\mu$.

6. *(Convergence dominée TCD) Si* $|X_n| \leq Y$, $Y \in L^1(\Omega, \mu)$ *et* $\mu(X_n \not\to X) = 0$ *(on dit* $X_n \to X$ *p.p.) alors* $\int X_n d\mu \to \int X d\mu$. *De plus, si* $Y \in L^p(\Omega, \mu)$ *pour* $1 \leq p < \infty$ *alors* $X_n, X \in L^p(\Omega, \mu)$ *et* $||X_n - X||_p \to 0$.
7. *(Fubini-Tonelli) Si* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ *la mesure produit,* μ_i σ*-fini, pour* Z *mesurable positive :* $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} Z(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)$ *est mesurable à valeur* $[0, \infty]$ *et*

$$\int_\Omega Z(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega_1} d\mu_1(\omega_1) \int_{\Omega_2} d\mu_2(\omega_2) Z(\omega_1, \omega_2)$$

8. *(Fubini) Si* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ *la mesure produit,* μ_i σ*-fini, pour* $X \in L^1(\Omega, \mu)$ *: pour p.p.*ω_1 $X(\omega_1, .) \in L^1(\Omega_2, \mu_2)$ *et* $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \in L^1(\Omega_1, \mu_1)$ *et*

$$\int_\Omega X(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega_1} d\mu_1(\omega_1) \int_{\Omega_2} d\mu_2(\omega_2) X(\omega_1, \omega_2).$$

1.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, E un evn. Soit finalement $A \subset E$ une partie de E.

Définition 9. Soit $f : A \times \Omega \to \mathbb{K}$. On suppose que pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable (soit dans $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$). Dans ce cas, on peut poser :

$F(x) = \int_\Omega f(x, t) d\mu(t)$. On définit ainsi une intégrale dépendant d'un paramètre la fonction $F : A \to \mathbb{K}$.

Théorème 14. *(Théorème de continuité avec hypothèse de domination)*

Soit $f : A \times \Omega \to G$.

On suppose :

1. *Pour tout* $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$, *est mesurable sur* Ω.
2. *Pour tout presque tout* $t \in \Omega$,$x \mapsto f(x, t)$ *est continue en* $x_0 \in A$.
3. *(Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable* $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $g \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *telle que*

$$\forall t \in \Omega, \forall x \in A, \quad ||f(x, t)|| \leq g(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_\Omega f(x, t) d\mu(t)$ *est continue en* x_0.

On remarquera que dans l'hypothèse de domination, la fonction g ne dépend pas de x.

Démonstration. L'hypothèse de domination garantit que $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable. Soit $x_n \in A$ tel que $x_n \to x_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x, t)$, pour chaque t, $f(x_n, t) \to f(x_0, t)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f(x_n, t) d\mu(t) = \int_\Omega f(x_0, t) d\mu(t).$$

□

Exemple 14. (cf TD.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa *transformée de Fourier* est définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt.$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ en utilisant une domination par $|f|$.

Théorème 15. *(Théorème de dérivabilité avec hypothèse de domination) Soit $f : U \times I \to I\!R^m$ avec $U \subset I\!R^n$ un ouvert.*

On suppose :

1. *Pour tout $x \in U$, $t \mapsto f(x,t)$, est intégrable sur Ω.*
2. *Il existe N avec $\mu(N^c) = 0$, tel que pour tout $t \in N$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une i-ème dérivée partielle sur U.*
3. *(Hypothèse de domination) Pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable $g_K \in L^1(\Omega)$ telle que*
$$\forall t \in N, \forall x \in K, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \right\| \leq g_K(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_\Omega f(x,t) d\mu(t)$ admet une i-ème dérivée partielle sur U, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) d\mu(t).$$

Démonstration. On peut supposer $n = m = 1$. On fixe x_0 et montre la dérivabilité en x_0. On pose

$$h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}, \quad \text{si} \quad x \neq x_0 \quad \text{et} \quad h(x_0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t).$$

Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_\Omega h(x,t) dt.$$

Il suffit donc de prouver que $x \mapsto \int_\Omega h(x,t) dt$ est continue en x_0. Par hypothèse, $t \mapsto h(x,t)$ est mesurable pour $x \neq x_0$ et par exemple en tant que $\liminf$ (sur N) aussi ex x_0 et $x \mapsto h(x,t)$ est continue pour $t \in N$. Enfin l'inégalité des accroissements finies donne, pour $x \neq x_0$:

$$||h(x,t)|| \leq \sup_{u \in [x_0,x]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(u,t) \right\| \leq g(t).$$

La même inégalité étant évidente en x_0, on a la condition de domination et le théorème de continuité conclut. □

Corollaire 16. *(Théorème de dérivation successive) Soit $f : U \times I \to I\!R^m$ avec $U \subset I\!R^n$ un ouvert une fonction $\mathcal{C}^k$ ($k \in I\!N \times \{\infty\}$).*

On suppose qu'il existe $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_k$ intégrables sur I telles que

$$\forall (i_1, ..., i_n), i_1 + ... + i_n = p \leq k, \forall x \in U \forall t \in I \left\| \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}(x,t) \right\| \leq \phi_p(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_\Omega f(x,t) d\mu(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et pour $p = i_1 + ... + i_n \leq k$:

$$\frac{\partial^p F}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}(x) = \int_\Omega \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}(x,t) d\mu(t).$$

2 Relation à la continuité

On verra en TD le résultat suivant :

Théorème 17 (de prolongement de Tietze)**.** *Soit X un espace métrique, F un fermé de X et $f : F \to I\!R$ une fonction continue bornée par C, alors il existe une fonction $g : X \to I\!R$ bornée par C et prolongeant f.*

On rappelle qu'un espace topologique est dit *localement compact* si tout point a un voisinage (d'adhérence) compact. [Rmq : pour nous, un voisinage d'un point n'est pas forcément ouvert, c'est seulement un ensemble contenant un ouvert contenant le point]

Lemme 18 (d'Urysohn)**.** *Si X est un espace métrique localement compact, V un ouvert contenant un compact K, alors il existe f continue à support compact tel que $1_K \leq f \leq 1_V$.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, soit U_x voisinage ouvert d'adhérence compact inclus dans V (pour voir que l'adhérence peut être inclus dans V il suffit d'intersecter le voisinage avec $\{y : d(y, V^c) > \epsilon/2\}$ pour $\epsilon = d(x, V^c)$). On recouvre K par un nombre fini de U_x, $K \subset U := \cup_{i=1}^n U_{x_i}$ et $\overline{U} = \cup_{i=1}^n \overline{U_{x_i}}$ est compact et on trouve un ouvert d'adhérence compact W, $V \supset W \supset \overline{U}$ et on pose $F = W^c \cup K$. On définit $g : F \to \mathbb{R}$ par $g = 1_K$. Si $x_n \in F$, $x_n \to x \in K$ nécessairement pour n grand $x_n \in U$ donc $x_n \in K$ donc $g(x_n) = g(x) = 1$. De même si $x \in W^c$, pour n grand, $x_n \in (\overline{U})^c$, donc $x_n \in W^c$ et $g(x_n) = g(x) = 0$. Donc g est continue sur F et s'étend en une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue par le théorème précédent et en centrant on a même, $0 \leq f \leq 1$ ($|f - 1/2| \leq 1/2$). Donc le support de f est dans $\overline{W}$ compact et $1_K \leq f \leq 1_W \leq 1_V$ ce qui conclut. $\square$

Définition 10. Une *mesure de Radon positive* sur X localement compact est une mesure positive définie sur une tribu $\mathcal{T}$ contenant la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et telle que :

1. $\mu(K) < \infty$ pour K compact (on parle de mesure de Borel).
2. μ est extérieurement régulière au sens où pour tout $E \in \mathcal{T}$, on a :
$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subset V,\ V \text{ ouvert }\}$$
3. μ vérifie pour tout E ouvert et $E \in \mathcal{T}$ avec $\mu(E) < \infty$, on a :
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) | E \supset K,\ K \text{ compact }\}$$
4. $\mathcal{T}$ est complète pour μ au sens où si $E \in \mathcal{T}$, $A \subset E$ et $\mu(E) = 0$ alors $A \in \mathcal{T}$.

Remarque 5. Tous les auteurs ne sont pas d'accord sur cette définition.

Le résultat suivant montre qu'une fonction mesurable est continue sur un ensemble de grande mesure.

Théorème 19 (de Lusin)**.** *Soit X un espace métrique localement compact. μ une mesure de Radon positive. Soit f une fonction complexe mesurable sur X s'annulant en dehors de A avec $\mu(A) < \infty$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe g continue à support compact avec $\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|$ et telle que :*
$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \leq \epsilon.$$

Démonstration. **Cas A compact, $0 \leq f \leq 1$.** On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{k}{2^n} 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(f(x)) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x).$$

Remarquons que $t_n := f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}} 1_{[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}[}(f(x)) = \frac{1}{2^{n+1}} 1_{T_n}, (f_{-1} := 0)$ avec $T_n \subset A$ de sorte que :

$$f(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} t_n(x).$$

Comme dans la preuve du lemme d'Urysohn, il existe un ouvert $A \subset V$ avec $\overline{V}$ compact, puis par régularité extérieure, on trouve V_n ouvert avec$T_n \subset V_n \subset V$ et enfin par intérieure régularité sur les ensembles de mesures finies $K_n \subset T_n$ avec $\mu(V_n - K_n) \leq 2^{-n-2}\epsilon$. Par le lemme d'Urysohn, on trouve h_n continue à support compact avec $1_{K_n} \leq h_n \leq 1_{V_n}$. On pose

$$g(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} 2^{-n-1} h_n(x).$$

Par convergence uniforme (car normale) de la série, g est continue, à support compact car inclus dans $\overline{V}$. Enfin $2^{-n-1}h_n(x) = t_n(x)$ sauf sur $V_n - K_n$ donc $f = g$ sauf sur $\cup_n(V_n - K_n)$ qui est de mesure au plus ϵ

Cas A quelconque, $0 \leq f \leq 1$. Par régularité, on prend $K \subset A$ compact avec $\mu(K - A) \leq \epsilon/2$ et on applique à $f 1_K$ le cas précédent en remplaçant ϵ par $\epsilon/2$.

Cas général Soit $B_n = \{x | f(x)| > n\}$ de sorte que $\cap B_n = \emptyset$, comme $\mu(B_1) < \infty$ en utilisant le TCM sur $1_{B_1} - 1_{B_n}$, $\mu(B_n) \to 0$, on applique à $(1 - 1_{B_n})f$ en décomposant la fonction en somme de 4n fonctions à valeur $[0, 1]$ (4 pour décompositions en parties positives, négatives des parties imaginaires et réelles, et ces fonctions sont dans $[0, n]$ d'où la décomposition en somme de n fonctions à valeurs $[0, 1]$). Enfin pour avoir l'inégalité on remplace g par $\phi \circ g$ avec $\phi(x) = x, |x| \leq R = \sup_{x \in X} |f(x)|$, $\phi(x)Rx/|x|, |x| > R$. On a $g(x) = \phi \circ g(x)$ pour tout x tel que $f(x) = g(x)$, donc on augmente pas l'ensemble sur lesquels f et g diffèrent. □

3 Définitions et propriétés élémentaires des espaces ℓ^p et L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ($\mathcal{T}$ la tribu, μ la mesure).

Vous avez vu durant le cours d'intégration, les espaces

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \{X : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable } | \int |X|^p d\mu < \infty\},$$

pour $p \in [1, \infty[$. Alors

$$||X||_p = (\int d\mu |X|^p)^{1/p}.$$

n'est pas une norme (mais une seminorme sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ car si $||X||_p = 0$ alors X est seulement nulle presque partout. On considère donc l'espace des classes d'équivalences à égalité presque partout près de fonctions $\dot{X}$ et l'espace de Lebesgue :

$$\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \{\dot{X}; X : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable et } \int |X|^p d\mu < \infty\},$$

pour $p \in [1, \infty[$.

Par la suite, on identifie X à $\dot{X}$ dans ce contexte et les égalités sont des égalités $p.p.$.

On définit

$$\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, P) = \{\dot{X}; X : \Omega \to \mathbb{K}, \text{ mesurable et } \exists C < \infty : |X| \leq C p.p.\}$$

et la norme :

$$||X||_\infty = \inf\{C : |X| \leq C p.p.\} =: \text{ess supp}_{x \in \Omega} |X(x)|.$$

Exercice 1. (cf TD) Monter que $|X| \leq ||X||_\infty p.p.$

Montrons que $||.||_p$ est une norme sur $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. La séparation et l'homogénéité sont maintenant évidentes. On rappelle l'inégalité de Hölder

Lemme 20 (inégalité de Hölder)**.** *Si $p, q \in [1, \infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1/r \leq 1$, $f \in L^p, g \in L^q$ alors $fg \in L^r$ et*

$$||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Démonstration. En remplaçant f, g par $|f|^r, |g|^r$ on se ramène au cas $r = 1$. Pour $p = 1, p = \infty$ le résultat est évident par l'exercice précédent en utilisant $|fg| \leq |f| ||g||_\infty$ p.p. ou l'analogue en échangeant f, g.

Pour $1 < p < \infty$, on remarque que par concavité du logarithme, on a pour $a, b > 0$ $\log(a^p/p + b^q/q) \geq \log(a^p)/p + \log(b^q)/q = \log(ab)$.

Donc on obtient en exponentiant (et en vérifiant directement les cas d'annulations), l'inégalité d'Young :

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}.$$

Donc en intégrant, on obtient $fg \in L^1$ et appliquant à λf, $\lambda > 0$:

$$||fg||_r \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} ||f||_p + \frac{\lambda^{-1}}{q} ||g||_q.$$

Comme le cas d'annulation $||f||_p = 0, ||g||_q = 0$ sont évidents, on conclut en supposant $||f||_p \neq 0, ||g||_q \neq 0$ et en prenant la valeur de λ donnant le minimum $\lambda = ||f||_p^{-1} ||g||_q^{q/p}$. □

Exercice 2. En déduire que $||.||_p$ est une norme.

Pour simplifier, on utilise des espaces mesurés σ-finis, c'est-à-dire avec une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\cup_n A_n = \Omega$ et $\mu(A_n) < \infty$.

On va en déduire l'expression alternative suivante dont l'inégalité triangulaire se déduit facilement. Cette méthode à l'avantage d'être utile pour le calcul du dual.

Proposition 21. *Soit μ σ-finie, $p \in [1, \infty]$, q tel que $1/p + 1/q = 1$ le coefficient conjugué, alors pour tout g mesurable*

$$||g||_q = \sup\{\left| \int fg d\mu \right|; ||f||_p \leq 1, fg \in L^1(\Omega, \mu), f \in L^1(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu)\}.$$

Preuve :

Soit A_n croissant telle que $\cup A_n = \Omega, \mu(A_n) < \infty$. On commence par le cas $g \in L^q(\Omega, \mu)$.

Par Hölder, $fg \in L^1$ donc l'intégrale est définie (avec la condition $||f||_p \leq 1$ seule) et

$$|\int fgd\mu| \leq ||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

d'où $||g||_q$ est plus grand que le sup de l'énoncé. Mais, pour $p \in]1, \infty[$, si on prend $f = \overline{g}|g|^{q-2}/||g||_q^{q-1}$ on a $|f|^p = |g|^{p(q-1)}/||g||_q^{p(q-1)} = |g|^q/||g||_q^q$ car $p(q-1) = qp(1-1/q) = q$, donc $f \in L^p$ et $||f||_p^p = E(|f|^p) = ||g||_q^q/||g||_q^q = 1$. Donc $||f1_{A_n}||_p^p \leq ||f||_p^p \leq 1$ donc comme $L^p(A_n, \mu) \subset L^1(A_n, \mu)$ car $\mu(A_n) < \infty$ on a $f1_{A_n} \in L^1(\Omega, \mu)$ et donc

$$g_{n,m}(f) = 1_{\{f1_{A_n} \neq 0\}} \frac{f1_{A_n}}{|f1_{A_n}|} min(m, |f1_{A_n}|) \in L^\infty(\Omega, \mu) \cap L^1(\Omega, \mu)$$

d'où le sup est supérieur à

$$\left|\int g_{n,m}(f) g d\mu\right| \to_{m\to\infty} \left|\int f1_{A_n} g d\mu\right| \to_{n\to\infty} \left|\int fgd\mu\right|$$

(par convergence dominée par $|g_{n,m}(f)g| \leq |fg|$) et le sup est supérieur à $\left|\int fgd\mu\right| = \int |g|^q d\mu/||g||_q^{q-1} = ||g||_q$. On déduit donc l'égalité énoncée.

Si $p = 1, q = \infty$, soit $C > \sup\{\left|\int fgd\mu\right| ; ||f||_1 \leq 1 fg \in L^1(\Omega, \mu), f \in L^1(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu)\}$ et $A = \{x : |g(x)| > C\}$. Supposons par l'absurde que $\mu(A) > 0$ soit $B \subset A$ avec $\mu(B) \in]0, \infty[$. Alors $f = 1_B \frac{\overline{g}}{|g|\mu(B)}$ est dans L^1 et $||f||_1 = 1$ (et borné par $1/\mu(B)$ donc dans L^∞) mais $\left|\int fgd\mu\right| = \int 1_B \frac{|g|}{\mu(B)} \geq C$ en contradiction avec le choix de C donc $\mu(A) = 0$ ce qui implique $||g||_\infty \leq C$ ce qui donne le résultat en prenant l'inf des C.

Si $p = \infty, q = 1$, il suffit de prendre $f = 1_{g\neq 0} \frac{\overline{g}}{|g|} \in L^\infty(\Omega)$ et $f1_{A_n} \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ de sorte que $f1_{A_n} g = |f|1_{A_n}$ et la norme $||f1_{A_n}||_\infty \leq 1$. Donc le supremum, est supérieur à $\int |f|1_{A_n} d\mu \to ||f||_1$ par convergence monotone.

Si on ne suppose plus $g \in L^q(\Omega, \mu)$ mais $||g||_q = \infty$. Soit alors $g_{n,m} = 1_{\{g\neq 0\}} \frac{g}{|g|} min(m, |g|) 1_{A_n} \in L^q(\Omega, \mu)$ on obtient $f_{n,m,k} \in L^1 \cap L^\infty$ de norme ≤ 1 dans L^p tel que

$$|\int f_{n,m,k} g_{n,m}| \to_{k\to\infty} ||g_{n,m}||_q.$$

Comme on a l'inégalité par Hölder,

$$|\int f_{n,m,k}(g_{n,m} - g1_{A_n})| \leq ||f_{n,m,k}||_p ||(g_{n,m} - g1_{A_n})||_q \leq ||(g_{n,m} - g1_{A_n})||_q \to_{m\to\infty} 0$$

par convergence monotone car $|\min(|g|, m) - |g||^q$ décroit vers 0, on trouve une suite m_k tel que

$$|\int f_{n,m_k,k} g 1_{A_n}| \to_{k\to\infty} ||g1_{A_n}||_q$$

(fini ou infini). Enfin comme par convergence monotone $||g1_{A_n}||_q \to ||g||_q$, on trouve une suite

$$|\int f_{n_k,m_k,k} g 1_{A_n}| \to_{k\to\infty} ||g||_q = \infty.$$

Comme $||f_{n_k,m_k,k}1_{A_n}||_p \leq 1$, et $f_{n_k,m_k,k}1_{A_n} \in L^1 \cap L^\infty$ et $f_{n_k,m_k,k}g1_{A_n} \in L^1$ cela donne la solution :

$$\sup\{\left|\int fgd\mu\right|; ||f||_p \leq 1, fg \in L^1(\Omega), f \in\in L^1 \cap L^\infty\} = \infty = ||g||_q.$$

■

Exemple 15. Dans le cas où μ est la mesure de comptage sur I (σ-finie si I dénombrable), $\mu(A) = Card(A)$, on obtient l'espace $\ell^p(I, \mathbb{K})$ des suites indicées par I de puissance p sommable, i.e. telles que

$$\sum_{i \in I} |x_i|^p < \infty$$

pour $p \in [1, \infty[$ et l'ensemble des suites bornées, c'est-à-dire telles que

$$||x||_\infty = \sup_{i \in I} |x_i| < \infty$$

pour $p = \infty$.

Proposition 22. *Soit* $X \geq 0$ *une fonction mesurable positive, alors pour* $p \in]0, \infty[$

$$\int X^p d\mu = \int_0^\infty dtpt^{p-1}\mu(X > t).$$

PREUVE : On remarque que $X^p = \int 0^X pt^{p-1}dt = \int 0^\infty pt^{p-1}1_{\{X>t\}}dt$. Or par Fubini-Tonelli,

$$\int X^p d\mu = \int d\mu \int_0^\infty dtpt^{p-1}1_{\{X>t\}} = \int_0^\infty dtpt^{p-1} \int d\mu 1_{\{X>t\}} = \int_0^\infty dtpt^{p-1}\mu(X > t).$$

■

Théorème 23. *Soit* (Ω, μ) *un espace mesuré* σ*-fini, les espaces* $L^p(\Omega, \mu, \mathbb{K})$ *pour* $p \in [1, \infty]$ *sont des espaces de Banach.*

Démonstration. Pour voir que $L^q(\Omega, \mu, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé on utilise le lemme 21. (On pourrait aussi prouver l'inégalité de Minkowski directement). On voit le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $f \in L^p$,

$$\left|\int f(g_1 + g_2)d\mu\right| \leq \left|\int fg_1 d\mu\right| + \left|\int fg_2 d\mu\right|$$

En passant au sup on obtient

$$||g_1 + g_2||_q \leq ||g_1||_q + ||g_2||_q$$

pour les valeurs finies ou infinies. En particulier $L^q(\Omega, \mu, \mathbb{K})$ est un groupe additif. Comme l'homogénéité est facile et que la séparation a déjà été vue, $L^q(\Omega, \mu, \mathbb{K})$ est bien un e.v.n.

Pour la complétude, on utilise la proposition 2. Soit $p < \infty$ Soit $\sum u_n$ qui est absolument convergente. Soit $g_k = \sum_{n=1}^k |u_n|$, $||g_k||_p \leq \sum ||u_n||$ et $|g_k|^p$ est croissante, donc par convergence monotone converge vers g avec $||g||_p \leq \sum ||u_n||_p$. Donc $|g|^p \in L^1$ qui donne une domination pour $|\sum u_n|^p$ et $\sum u_n$ est p.p. absolument convergente, donc a p.p. une limite et par convergence dominée, converge donc dans L^p. Le cas de L^∞ est plus simple car on supprime un ensemble négligeable où on a les bornes uniformes et on peut appliquer un résultat de convergence uniforme. □

Remarque 6. La preuve montre qu'une série absolument convergente dans L^p $p < \infty$ converge p.s. En particulier, une suite convergeant dans $L^p(\Omega)$ avec Ω σ-fini admet une sous-suite convergeant p.p. et dans $L^p(\Omega)$.

3.1 Premiers résultats de densité

On rappelle qu'une fonction étagée sur $(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ et une combinaison linéaire (finie) de fonctions indicatrices 1_A avec $\mu(A) < \infty$.

Lemme 24. *Soit $(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ un espace σ-fini. L'ensemble S des fonctions étagées est dense dans tous les $L^p(\Omega, \mu, \mathcal{T})$, $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Cela vient de la construction de l'intégrale, mais rappelons une preuve. En décomposant en partie réelle imaginaire puis parties positives et négatives, on se ramène à approcher $f \in L^p$ avec $f \geq 0$. Si $\Omega = \cup A_n \mu(A_n) < \infty$, on a $||f 1_{A_n} - f||_p \to 0$ par convergence dominée, donc on prend $h = f 1_{A_m}$.

On prend

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{4^n} \frac{k}{2^n} 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(h(x)) = \sum_{k=0}^{4^n} \frac{k}{2^n} 1_{h^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)}(x) \leq h(x)$$

Comme h mesurable, il est facile de voir que $h \in S$,

$$||h - h_n||_p \leq ||h 1_{h(x) \geq 2^n}||_p + ||1_{h(x) \leq 2^n} 1_{A_m}||_p \frac{1}{2^n}$$

et le premier terme tend vers 0 par convergence dominée (par $|h|^p$), le second car $\mu(A_m)^{1/p} < \infty$. Donc h puis f sont dans l'adhérence.

$\square$

Lemme 25. *Soit $(X, \mu, \mathcal{T})$ un espace métrique localement compact avec μ mesure de Radon σ-finie. L'ensemble $C_c(X)$ des fonctions continues à support compact est dense dans tous les $L^p(X, \mu, \mathcal{T})$, $1 \leq p < \infty$. De plus si $f \in L^p(X, \mu, \mathcal{T})$ et $\int f\phi = 0$, pour tout $\phi \in C_c(X)$ alors $f = 0$ p.p.*

Démonstration. Par le lemme précédent, il suffit d'approcher les éléments de S. Par le théorème de Lusin 19, pour chaque $f \in S$, $\epsilon > 0$, on a $g \in C_c(X)$ avec $\mu(g \neq f) \leq \epsilon$ et $\sup |g| \leq sup|f| = C$ donc $||f - g||_p \leq 2C\mu(g \neq f)^{1/p}$ et cette quantité est arbitrairement petite. Pour le résultat d'annulation, si $p > 1$, On utilise la densité dans L^q, q exposant conjugué, pour obtenir $\int fg = 0$ pour $g \in L^q$, d'où in déduit $||f||_p = 0$ par la proposition 21. Si $p = 1$, on remplace f par $f|_V$ avec V ouvert $\overline{V}$ compact, qui couvrent X par locale compacité de sorte qu'on peut supposer $\mu(X) < \infty$. On peut supposer f réelle. Soit $f_1 \in C_c(X)$ avec $||f - f_1||_1 \leq \epsilon$, $K_1 = f_1^{-1}([\epsilon, \infty[)$ et $K_{-1} = f_1^{-1}(] - \infty, \epsilon])$ sont compacts, on prolonge par le Théorème de Tietze 17, $u \in C_c(X)$ valant ϵ sur K_ϵ et soit $K = K_1 \cup K_{-1}$. Donc

$$||f_1||_1 = \int_K f_1 u + \int_{X-K} |f_1| \leq \int_X f_1 u + 2\int_{X-K} |f_1| \leq \epsilon + \int_X fu + 2\mu(X - K)\epsilon \leq \epsilon + 2\mu(X)\epsilon$$

car $|f_1| \leq \epsilon$ sur $X - K$. Donc $||f||_1 \leq 2\epsilon + 2\mu(X)\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ ce qui donne $f = 0$. $\square$

Donnons une application.

Proposition 26. *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $\tau_h f(x) := f(x + h)$ pour $h, x \in \mathbb{R}^d, f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. La translation $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ est isométrique et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $h \mapsto \tau_h(f)$ est continue de $\mathbb{R}^d \to L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. L'isométrie est évidente par invariance de la mesure de Lebesgue par translation. Montrons que $||\tau_h f - f||_p \to_{h\to 0} 0$. En effet pour $\epsilon > 0$, par densité du lemme 25, on trouve $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ avec $||f_1 - f||_p \leq \epsilon/3$ donc comme τ_h est une isométrie : on obtient :

$$||\tau_h f - f||_p \leq ||\tau_h f_1 - \tau_h f||_p + ||\tau_h f_1 - f_1||_p + ||f_1 - f||_p \leq 2\epsilon/3 + Leb(B(0,||h||) + \mathrm{Supp}(f_1))^{1/p}||\tau_h f_1 - f_1||_\infty$$

Pour h assez petit, comme f_1 est uniformément continue (car continue à support compact et par le Théorème de Heine), on peut trouver $1 \geq \delta > 0$ de sorte que si $||h|| \leq \delta$, $||\tau_h f_1 - f_1||_\infty = \sup_x |f_1(x+h) - f_1(x)| \leq \epsilon/[3Leb(B(0,1) + \mathrm{Supp}(f_1))^{1/p}]$ ce qui conclut. □

4 Convolution

Dans cette section, on considère l'espace mesuré $(\Omega, \mu, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}^d, Leb, \mathcal{B})$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On note alors $L^p(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d, Leb, \mathcal{B})$. Vu l'accord avec l'intégrale de Riemann, on note aussi $dy = dLeb(y)$.

Théorème 27 (définissant la Convolution)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d), g \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. La* convolution *de f et g est la fonction $f * g$ définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et :

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Démonstration. Si $p = \infty$, comme $|g| \leq ||g||_\infty p.p.$, $f(x-y)g(y) \leq ||g||_\infty |f(x-y)|$ d'où l'intégrabilité et la borne souhaitée en intégrant (comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation).

On suppose d'abord $p = 1$ et on utilise le Théorème de Fubini Tonelli pour calculer :

$$\int dx |f| * |g|(x) = \int dx \int dy |f(x-y)||g(y)| = \int dy \int dx |f(x-y)||g(y)| = ||f||_1 \int dy |g(y)| = ||f||_1 \, ||g||_1 < \infty$$

On déduit du théorème de Fubini que pour presque tout x, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable et on obtient la borne souhaitée

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Pour $1 < p < \infty$, soit q l'exposant conjugué. Du cas $p = 1$ on déduit $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ est dans L^1 donc $y \mapsto |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ est dans L^p pour presque tout x. Or $y \mapsto |f(x-y)|^{1/q} \in L^q$ donc par Hölder, $y \mapsto |f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|.|f(x-y)|^{1/q}$ est dans L^1 et

$$|(f * g)(x)|^p \leq \left(\int |f(x-y)||g(y)|dy\right)^p \leq \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p dy\right) ||f||_1^{p/q}.$$

Par l'inégalité précédente du cas $p = 1$, on obtient donc en intégrant :

$$||f * g||_p^p \leq ||f||_1^{p/q} |||f| * |g|^p||_1 \leq ||f||_1^{p/q} ||g||_p^p ||f||_1 = ||f||_1^p ||g||_p^p.$$

□

Exercice 3. (cf TD) Soit $f \in L^1, g \in L^p, h \in L^q$, $\check{f}(x) = \overline{f}(-x)$ Montrez que :

$$\int \overline{(f * g)} h = \int \overline{g} (\check{f} * h).$$

4.1 Support de la convolution

Si f continue, $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Le résultat suivant permet d'étendre la définition aux fonctions mesurables.

Lemme 28. *Pour $f : I\!R^d \to I\!K$ mesurable, soit $(\omega_i)_{i\in I}$ la famille de tous les ouverts tels que, pour chaque i, $f = 0$ p.p sur ω_i. Si $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$ alors $f = 0$ p.p. sur ω. De sorte que ω est le plus grand ouvert sur lequel $f = 0$ p.p.*

Démonstration. Il faut écrire ω comme union dénombrable car I n'est pas forcément dénombrable. Soit $K_n = \{x \in \omega : ||x|| \leq n, d(x, \omega^c) \geq 1/n\}$ comme la distance à un fermé est continue, on voit que K_n fermé borné de $\mathbb{R}^n$ (e.v.n de dimension finie) donc est compact et $\omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Par compacité, K_n, recouvert par une union finie $K_n \subset \omega_{i_{n,1}} \cup ... \cup \omega_{i_{n,r_n}}$. donc $\omega = \cup_{n\in\mathbb{N}, j\leq r_n}\omega_{i,j}$ est union dénombrable d'ouvert sur lesquels $f = 0$ p.p. d'où le résultat. □

Définition 11. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ mesurable, On pose $\mathrm{Supp}(f) = \mathbb{R}^d - \omega$ où ω est le plus grand ouvert sur lequel $f = 0$ p.p. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose $\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Supp}(f_1)$ pour n'importe quel représentant $f_1 \in f$ de la classe d'égalité presque partout.

Proposition 29. *Si $f \in L^1(I\!R^d), g \in L^p(I\!R^d)$ alors :*

$$Supp(f * g) \subset \overline{Supp(f) + Supp(g)}.$$

Démonstration. On fixe $x \in \mathbb{R}^d$ avec $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1$. Si $x \notin \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)$, on a $(x - \mathrm{Supp}(f)) \cap \mathrm{Supp}(g) = \emptyset$ donc en intégrant $f * g(x) = 0$ sur $Int((\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g))^c) = (\overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)})^c$. Donc $f * g$ est 0, p.p. sur cet ouvert de sorte qu'il est inclus dans $\mathrm{Supp}(f * g)^c$. □

4.2 Régularisation par convolution

On étudiera plus systématiquement au chapitre suivant certaines classes importantes de fonctions continues. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On note $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions k-fois différentiables avec leurs dérivées continues et $C_c^k(\Omega)$ les fonctions à support compacts de $C^k(\Omega)$. Pour simplifier si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f.$$

On note $|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_d|$. On note

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega), \quad C_c^\infty(\Omega) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C_c^k(\Omega).$$

Proposition 30. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in C_c^k(I\!R^d), g \in L^p(I\!R^d)$, $k \in I\!N \cup \{\infty\}$ alors $f * g \in C^k(I\!R^d)$ et si $|\alpha| \leq k$:*

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha(f) * g.$$

De plus, si $p < \infty$, on a aussi la formule comprise comme intégrale de Riemann à valeur $L^p(I\!R^d)$, si Supp(f) $\subset [-C, C]^d$:

$$f * g = \int_{[-C,C]^d} dy f(y)\tau_{-y} g.$$

Démonstration. Par récurrence il suffit du cas $k = 1$. On applique le théorème de dérivation avec condition de domination. $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)g(y) = (\frac{\partial}{\partial x_i} f)(x-y)g(y)$.

Comme $(\frac{\partial}{\partial x_i} f)$ est à support compact et continue, il est borné par $||(\frac{\partial}{\partial x_i} f)||_\infty$ et

$$|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)g(y)| \leq ||\frac{\partial}{\partial x_i} f||_\infty 1_K(x-y)g(y),$$

avec K le compact support de f. Or par Hölder $\int 1_{B-K}(y)|g|(y)dy \leq Leb(B-K)^{1/q}||g||_p$, donc on a une domination par une fonction intégrable $c1_{B-K}g$ si $x \in B$ avec B compact. Le théorème de dérivation 15 conclut donc. De plus, par changement de variable linéaire si Supp(f) $\subset [-C,C]^d$, on a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy = \int_{[-C,C]^d} f(y)(\tau_{-y}g)(x)dy$$

avec $\tau_h(g)(x) = g(x+h)$. On a vu à la proposition 26 que $y \mapsto f(y)(\tau_{-y}g)$ est continue à valeur $L^p(\mathbb{R}^d)$ on peut donc parler de son intégrale de Riemann, sur $[-C,C]^d$ (calculée successivement variable par variable). On obtient une suite (de sommes de Riemann) qui converge dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, donc quitte à extraire une suite qui converge p.p. et donc p.p. la limite $\int_{[-C,C]^d} dyf(y)(\tau_{-y}g)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_{[-C,C]^d} dyf(y)(\tau_{-y}g)(x)$ par exemple si g est continue à support compact et cette intégrale vaut l'intégrale de Lebesgue donc $f * g(x)$. On en déduit l'égalité voulue dans L^p si g continue à support compact. Or par densité, on a une suite de fonction g_n continue à support compact convergeant dans L^p vers g. Et comme $\sup_{\mathbb{R}^d} ||\tau_{-y}g_n - \tau_{-y}g||_p \to 0$, $f(.)(\tau_{-.}g_n)$ converge uniformément vers $f(.)(\tau_{-.}g)$ et comme l'intégrale de Riemann est continue pour la convergence uniforme $\int_{[-C,C]^d} dyf(y)(\tau_{-y}g)$ est la limite de $\int_{[-C,C]^d} dyf(y)(\tau_{-y}g_n)$ dans L^p qu'on a déjà vu valoir $f * g_n$, qui a pour limite $f * g$ donc $\int_{[-C,C]^d} dyf(y)(\tau_{-y}g) = f * g$. □

4.3 Suites régularisantes et densité par convolution

Définition 12. Une *suite régularisante* est une suite de fonction $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$ et $\text{Supp}(\rho_n) \subset B_{||.||_2}(0, 1/n)$.

Exercice 4. Montrer que si $\rho_n(x) = Cn^d\rho(nx)$ avec $C\int \rho = 1$ et $\rho(x) = 1_{\{||x||_2<1\}} \exp(\frac{1}{||x||_2^2-1})$ alors ρ_n est une suite régularisante sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 31. *Soit ρ_n suite régularisante et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$. Alors $||\rho_n * f - f||_p \to 0$.*

Démonstration. On a comme $||.||_p$ est une norme on a par l'inégalité triangulaire (de l'intégrale de Riemann et la proposition 30) :

$$||\rho_n * f - f||_p = ||\int dy\rho_n(y)(\tau_{-y}f - f)||_p \leq \int_{B(0,1/n)} dy\rho_n(y)||\tau_{-y}f - f)||_p$$

Or si n assez grand, on a vu à la proposition 26 que $||\tau_{-y}f - f)||_p \leq \epsilon$ pour $y \in B(0,1/n)$ de sorte que la dernière intégrale est bornée par $\epsilon \int_{B(0,1/n)} dy\rho_n(y) = \epsilon$. □

Proposition 32. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $K_n = \{x \in \Omega : ||x||_2 \leq n, d(x, \Omega^c) \geq 1/n\}$. On a déjà remarqué que K_n compact et $\cup K_n = \Omega$ donc $f1_{K_n} \to f$ p.p. et par la domination $|f1_{K_n} - f| \leq |f|$ on conclut par le TCD à $||f1_{K_n} - f||_p \to 0$. Soit $m > n$, si on considère $\rho_m * (f1_{K_n}) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a par la relation sur les support des convolution,

$$\mathrm{Supp}(\rho_m * f1_{K_n}) \subset \mathrm{Supp}(\rho_m) + \mathrm{Supp}(f1_{K_n}) \subset B(0, 1/m) + K_n \subset \Omega$$

(vu que pour K, F compacts $K + F$ est compact et en comparant les distances pour la dernière inclusion). Donc $\rho_m * (f1_{K_n}) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Mais on a vu $||\rho_m * (f1_{K_n}) - f1_{K_n}||_{L^p(\Omega)} = ||\rho_m * (f1_{K_n}) - f1_{K_n}||_p \to_{m\to\infty} 0$. Donc $f1_{K_n}$ puis f sont dans l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$. $\square$

Chapitre 2

Espaces de fonctions continues

1 Premiers exemples

Exemple 16. Soit X un espace topologique, F un e.v.n. et $C_b(X,F)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur X à valeur dans F, on a la norme uniforme :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} ||f(x)||_F$$

Exercice 5. (cf TD) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur U. Soit $K \subset U$ compact on a la semi-norme (de convergence uniforme sur K) :

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Ce n'est pas une norme car si $p_K(f) = 0$ f ne s'annule que sur K et pas forcément sur U. Soit $K_n = B(0,n) \cap \{x \in U d(x,U^c) \geq 1/n\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc un compact (inclus dans U) tel que $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = U$. On peut définir sur $C(U,\mathbb{R})$ la distance (exo)

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_{K_n}(f-g)).$$

Il est facile de voir que $d(f_n,g) \to 0$ si et seulement si f_n converge vers$g$ uniformément sur tout compact. Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $C(U,\mathbb{R})$ telle que N et d définissent la même topologie (on dit que $(C(U,\mathbb{R}),d)$ n'est pas normable).

Exemple 17. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a vu au chapitre précédent l'espace $C_c(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur U à support compact. On peut aussi décrire une topologie naturelle (limite inductive) sur $C_c(U,\mathbb{R})$ tel $f_n \to f$, si le support de la suite est inclus dans un compact fixe K et f_n converge uniformément vers f. Elle n'est ni normable ni définissable par une suite de semi-normes.

Les espaces non-normables seront étudiés plus au second semestre.

Exemple 18. $c_0(I)$ est l'ensemble des suites $(x_i)_{i\in I}$ qui tendent vers 0 dans le sens où si $\epsilon > 0$, il existe une partie F finie telle que $|x_i| \leq \epsilon$ pour tout $i \notin F$. On munit $c_0(I)$ de la norme sup :

$$||x||_\infty = \sup_{i\in I} |x_i| < \infty.$$

Théorème 33. *Les espaces $(C_b(X,F), ||.||_\infty)$, pour X espace topologique et F espace de Banach, et $c_0(I)$, sont des espaces de Banach.*

Démonstration. On a vu que ce sont des espaces normés. Montrons qu'ils sont complets. Soit f_n une suite de Cauchy, donc comme $||f_p(x) - f_q(x)||_F \leq ||f_p - f_q||_\infty$, pour tout $x \in X$, $(f_p(x))$ est de Cauchy, donc par complétude de F, converge vers une valeur $f(x)$. Soit p, q tel que pour tout x $||f_p(x) - f_q(x)|| \leq \epsilon$ en prenant la limite $q \to \infty$, on déduit $||f_p(x) - f(x)|| \leq \epsilon$ donc $||f_p - f|| \leq \epsilon$. Donc f_p converge uniformément vers f, donc f est continue (résultat de licence : soit $\epsilon > 0$ on prend p tel que $||f_p - f|| \leq \epsilon/3$ et on choisit un voisinage V de x tel que $|f_p(x) - f_p(y)| \leq \epsilon/3, y \in V$, on déduit $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$ pour $y \in V$ d'où la continuité de la limite f) et donc f_p converge vers f dans $C_b(X, F)$ (f est borné par $\sup_n ||f_n||$). Ce qui donne la complétude.

Pour $c_0(I)$, le cas $X = I$ avec la topologie discrète donne la complétude de $C_b(I, \mathbb{K})$ (qui est aussi $\ell^\infty(I)$). Montrons que $c_0(I)$ est un sous espace fermé (d'un e.v.n complet donc complet). Or si $f_n \to f$ pour n grand $|f_n - f| \leq \epsilon/2$ et, en fixant un tel n, pour $i \notin I$ $|f_n| \leq \epsilon/2$ pour un certain I donc pour $i \notin I$ $|f_n| \leq \epsilon$ ce qui montre vu ϵ arbitraire que la limite $f \in c_0(I)$. □

Ceci a une application importante aux applications linéaires continues :

Théorème 34. *Si E est un e.v.n. et F un espace de Banach, alors $(L(E, F), |||.|||)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit B la boule fermée de E de centre 0 et de rayon 1 et $i : L(E, F) \to C_b(B, F)$ la restriction à la boule. Par définition des normes, c'est une isométrie qui identifie donc $L(E, F)$ à un sous espace de $C_b(B, F)$. Montrons que ce sous espace est fermé (il sera donc complet par complétude de $C_b(B, F)$).

Montrons que

$$i(L(E, F)) = \{u \in C_b(B, F) : \forall \lambda, \mu \in K |\lambda| + |\mu| \leq 1, \forall x, y \in B, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)\}.$$

Cela suffit car cela décrit $i(L(E, F))$ comme une intersection de fermé vu que $u \mapsto u(y)$ est une application continue sur $C_b(B, F)$. L'inclusion $\subset$ est évidente. Réciproquement si u est continue sur B donc en 0 et dans l'ensemble indiqué, pour $x \in E$ on pose $u_E(x) = ||x||_E u(\frac{x}{||x||_E})$ et $u_E(0) = 0$. D'abord si $||x|| \leq 1$ on remarque que u_E étend la précédente valeur de u sur B (en prenant $y = 0$ dans la relation). De même u_E est positivement homogène. Donc si $(x, y) \neq 0$, on pose $x' = x/\max(||x||, ||y||), y' = y/\max(||x||, ||y||), \lambda' = \lambda/(|\lambda| + |\mu|), \mu' = \lambda/(|\lambda| + |\mu|)$ pour obtenir par homogénéité et la relation appliquée à x', y', λ', μ' :

$$\begin{aligned} u_E(\lambda x + \mu y) &= (|\lambda| + |\mu|) \max(||x||, ||y||) u(\lambda' x' + \mu' y') \\ &= (|\lambda| + |\mu|) \max(||x||, ||y||)[\lambda' u(x') + \mu' u(y')] \\ &= \lambda u_E(x) + \mu u_E(y) \end{aligned}$$

Donc u_E est linéaire continue en 0, donc linéaire continue et $u = i(u_E)$ comme souhaité. □

Remarque 7. Soit (Y, d) un espace métrique borné, $d_y \in (C_b^0(Y, \mathbb{R})), d_y(x) = d(y, x)$ la distance à y. $||d_y - d_z|| = \sup_{x \in Y} |d(y, x) - d(z, x)| = d(y, z)$ (car $\leq$ par l'inégalité triangulaire inverse et $\geq$ en prenant $x = y$ ou $x = z$) Donc $d : Y \to C_b^0(Y, \mathbb{R})$ est une isométrie.

2 Théorème d'approximation de Weierstrass

Théorème 35 (de Bernstein)**.** *Soit $f : [0, 1]^n \to \mathbb{C}$ continue et définissons le polynôme de Bernstein :*

$$B_N(f)(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1=0}^{N} \cdots \sum_{k_n=0}^{N} C_N^{k_1} ... C_N^{k_n} f(\frac{k_1}{N}, ..., \frac{k_n}{N}) x_1^{k_1} (1 - x_1)^{N-k_1} ... x_n^{k_n} (1 - x_n)^{N-k_n}$$

Alors $B_N(f)$ converge uniformément sur $[0,1]^n$ vers f

Démonstration. On interprète de façon probabiliste $B_N(f)$. Soit $\Omega = \{0,1\}^{Nn}$ avec la mesure de probabilité
$$P(\omega_1 = i_1, ..., \omega_{Nn} = i_n) = x_1^{k_1}(1-x_1)^{N-k_1}...x_n^{k_n}(1-x_n)^{N-k_n}$$
avec k_i le nombre de 1 parmi $i_{N(i-1)+1}, ..., i_{Ni}$. On note $S_1(\omega) = \frac{\omega_1+...+\omega_N}{N}, ..., S_n(\omega) = \frac{\omega_{N(n-1)+1}+...+\omega_{Nn}}{N}, S = (S_1, ..., S_n)$ qui sont des variables de loi binomiales indépendantes du point de vue probabiliste. Alors $\int dPf(S_1, ..., S_n) = B_N(f)(x_1, ..., x_n)$, donc si $\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \leq h\}$ est le module d'uniforme continuité de f, on a :

$$|f(x_1, ..., x_n) - B_N(f)(x_1, ..., x_n)| \leq ||f(x_1, ..., x_n) - f(S)||_1 \leq \omega(\delta) + 2||f||_\infty P\left(|(x_1, ..., x_n) - S| \geq \delta\right)$$

Or par union disjointe et l'inégalité de Markov :

$$P\left(|(x_1, ..., x_n) - S| \geq \delta\right) \leq \sum_{i=1}^n P\left(|x_i - S_i| \geq \delta\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{E(|x_i - S_i|^2)}{\delta^2}$$

Or un calcul simple donne $E(|x_i - S_i|^2) = Var(S_i) = \frac{x_i(1-x_i)}{N} \leq \frac{1}{4N}$ donc

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{(x_1,...,x_n)\in[0,1]^n} |f(x_1, ..., x_n) - B_N(f)(x_1, ..., x_n)| \leq \limsup_{N\to\infty} \omega(\delta) + \frac{2n||f||_\infty}{4N\delta^2} = \omega(\delta) \to_{\delta\to 0} 0.$$

□

Corollaire 36 (Théorème d'approximation de Weierstrass). *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ les polynômes sont denses dans $C^0(K, \mathbb{C})$*

Démonstration. Comme K est fermé borné, $K \subset [-N,N]^n$ et par le théorème de Tietze 17, f continue sur K se prolonge en une fonction continue sur $[-N,N]^n$, il suffit donc du cas $K = [-N,N]^n$ que l'on obtient par translation et dilatation (qui conservent les polynômes) du résultat précédent. □

Remarque 8. Plus généralement, le théorème de Stone Weierstrass indique que toute sous-algèbre A (stable par conjugaison complexe) de $C^0(K, \mathbb{C})$ avec K compact qui contient les fonctions constantes et sépare les points (au sens pour $x \neq y$ il existe $P \in A$ avec $P(x) \neq P(y)$) est dense pour la norme uniforme :$\overline{A} = C^0(K, \mathbb{C})$.

3 Un résultat de compacité : le Théorème d'Ascoli

Définition 13. Un espace métrique (X, d) est précompact si pour tout $\epsilon > 0$, X peut être couvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ.

Remarque 9. On rappelle le résultat suivant (cf. e.g. Zuily-Quéffelec Th II.1 p135 ou Gourdon d'Analyse p 32) : Un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.

Définition 14. Soient X, Y des espaces métriques, une partie $F \subset C^0(X, Y)$ est *équicontinue* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tel que $\forall x, y \in X, \forall f \in F$, si $d(x,y) \leq \delta$ alors $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

Théorème 37 (d'Ascoli). *Soient X, Y des espaces métriques compacts, si une partie F est équicontinue alors $\overline{F}$ est compacte (pour la topologie de la convergence uniforme donnée par la distance $d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$).*

Exercice 6. Montrer la réciproque facile.

Démonstration. Comme Y compact il est complet borné donc $d : Y \to C_b^0(Y, \mathbb{R})$ est une isométrie et $d(Y)$ est complet donc fermé. Elle induit une isométrie de $C^0(X, Y) \to C^0(X, C_b^0(Y, \mathbb{R}))$ qui est un espace de Banach. Les équations $f(x) \in d(Y), x \in X$ montrent que l'image de l'isométrie est fermé (comme intersection de fermés $\cap_{x\in X} ev_x^{-1}(d(Y))$, $ev_x(f) = f(x)$) donc complet. Donc $C^0(X, Y)$ est aussi complet (on aurait aussi pu reprendre la preuve du cas Y Banach) et $\overline{F}$ aussi.

Il reste à voir que $\overline{F}$ est précompact. Or en recouvrant F par des boules de rayon $\epsilon/2$, $\overline{F}$ est recouvert par les boules de même centre et rayon ϵ, donc il suffit de voir F précompact. Soit $\epsilon > 0$, on fixe $\delta(\epsilon) > 0$ donné par l'équicontinuité et R les centres d'un recouvrement de X par des boules de rayons $\delta(\epsilon)$ donné par sa précompacité.

Remarquons que si $d(f(r), g(r)) \leq \epsilon$ pour tout $r \in R$, en prenant r avec $d(x, r) \leq \delta(\epsilon)$, on a par l'équicontinuité et l'inégalité triangulaire :

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(r)) + d(f(r), g(r)) + d(g(r), g(x)) \leq 3\epsilon \Rightarrow d(f, g) \leq 3\epsilon.$$

Soit enfin S les centres des boules de rayon $\epsilon/2$ recouvrant Y. Nous allons indicés les boules d'un 4ϵ recouvrement par les applications S^R de R vers S en nombre fini. Pour $\phi \in S^R$, soit

$$F_\phi = \{f \in F, \forall r \in R d(\phi(r), f(r)) \leq \epsilon/2\}$$

Si $f, g \in F_\phi$ alors l'inégalité triangulaire donne, $d(g(r), f(r)) \leq \epsilon$ pour tout r donc $d(f, g) \leq 3\epsilon$ et si F_ϕ est non-vide il est inclus dans $B(b_\phi, 4\epsilon)$.

Enfin, il suffit donc de voir que $F \subset \cup_{\phi\in S^R} F_\phi$. Or chaque valeur possible de $f(r)$ est à distance inférieure à $\epsilon/2$ d'un $s = \phi(r) \in S$ pour un certain ϕ, ce qui conclut. □

Théorème 38 (d'Ascoli)**.** *Soient X un espace métrique compact et E un e.v.n. de dimension finie, si une partie F est équicontinue et bornée de $C^0(X, E)$ alors $\overline{F}$ est compacte (pour la topologie de la convergence uniforme donnée par la norme $||.||_\infty$).*

Démonstration. Si $M = \sup\{||f||_\infty, f \in F\}$, $F \subset C^0(X, B_F(0, M))$ et $Y = B_F(0, M)$ est fermé borné donc compact comme E est de dimension finie. Le théorème précédent conclut. □

4 Espaces de fonctions $C_b^k(\Omega)$ et Espaces de Hölder

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On rappelle que D^α désigne la dérivée partielle itérée pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$. $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_d!$

Définition 15. L'espace $C_b^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues bornées à valeurs réelles sur Ω, k-fois continûment différentiables avec toutes ces dérivées partielles bornées. On le muni de la norme :

$$||u||_{C_b^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Remarque 10. On a $C_c^k(\Omega) \subset C_b^k(\Omega) \subset C^k(\Omega)$. mais contrairement à ces deux espaces qui ne sont pas des espaces de Banach, on a le résultat suivant dont on ferra la preuve en TD :

Proposition 39. $C_b^k(\Omega)$ *est un espace de Banach. C'est même une algèbre de Banach, c'est à dire une algèbre qui est un espace de Banach avec la norme vérifiant :*

$$||uv||_{C_b^k(\Omega)} \leq ||u||_{C_b^k(\Omega)} ||v||_{C_b^k(\Omega)}.$$

Pour les applications aux EDP, ces espaces sont insuffisants, on doit interpoler entre C_b^0 et C_b^1.

Définition 16. L'espace $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues bornées à valeurs réelles sur Ω, et α-Höldérienne. On le munit de la norme :

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{||x-y||_2^\alpha}.$$

On a $C_b^1(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C_b^0(\Omega)$. On généralise cela par induction :

Définition 17. L'espace $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues de $C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ avec $\partial f/\partial x_i \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$. On le munit de la norme :

$$||u||_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} ||D^\alpha u(x)||_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

On identifie $C^{k,0}(\Omega) = C_b^k(\Omega)$. On verra en TD :

Proposition 40. *$C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un espace de Banach et une algèbre.*

Exercice 7. Montrez que pour $\alpha > \alpha'$, $\epsilon > 0, u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$:

$$||u||_{C^{0,\alpha'}(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\epsilon^{\alpha'}} + 1\right) ||u||_\infty + \epsilon^{\alpha-\alpha'} ||u||_{C^{0,\alpha}(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Proposition 41. *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $k \geq 1$ et $\alpha > \alpha'$. Soit f_n une suite bornée de $C^{k,\alpha}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite qui converge dans $C^{k,\alpha'}(\Omega)$ et ayant une limite dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$.*

Remarque 11. On verra que cela s'interprète en disant que l'injection de $C^{k,\alpha'}(\Omega)$ dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un opérateur compact, une famille d'application linéaire continue que l'on étudiera.

Démonstration. Les suites des dérivées partielles $g_{\beta,n} = D^\beta f_n$ sont toutes bornées dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$, donc bornée et équicontinue dans $C^0(\overline{\Omega})$ (être uniformément continue permet l'extension unique à l'adhérence). Comme $\overline{\Omega}$ est fermé borné donc compact, on peut appliquer le théorème d'Ascoli 37, on obtient que les $g_{\beta,n}$ convergent uniformément vers une limite g_β. Il est alors standard d'identifier les limites uniformes à $g_\beta = D^\beta g_0$. Par la bornitude dans $C^{0,\alpha}$, les limites uniformes montrent que les limites sont $g_\beta \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, donc $g_0 \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Il reste à montrer la convergence de $g_{\beta,n}$ vers g_β dans $C^{0,\alpha'}(\Omega)$. (2.1) conclut car $||g_{\beta,n} - g_\beta||_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ borné et $||g_{\beta,n} - g_\beta||_\infty$ petit pour n grand. $\square$

5 Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}$

Exemple 19. Soit $1 \leq p < \infty$, et $I =]a, b[$ un intervalle ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev :

$$W^{1,p}(I) = \{f \in L^p(I, Leb) : \exists g \in L^p(I, Leb) : \forall \varphi \in C_c^1(I) \int_I f\varphi' = -\int_I g\varphi\}.$$

avec $C_c^1(I)$. Par le lemme 25 (comme C_c^1 dense dans C_c^0 pour $||.||_\infty$), le g de la définition est unique et noté $g = f'$. On pose

$$||f||^p_{W^{1,p}(I)} = ||f||_p^p + ||f'||_p^p.$$

On pourrait aussi considérer la norme équivalente $||f||_p + ||f'||_p$ mais dans le cas $p = 2$ on n'aurait pas une norme hilbertienne Par récurrence on pose $W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}, m \geq 2$. Si I borné, on remarque que $C^m(\overline{I}) \subset W^{m,p}(I)$.

Lemme 42. *$W^{m,p}(I)$ est un espace de Banach, $m \geq 1$. De plus si $u_n \in W^{1,p}(I)$ et $||u_n - u||_p \to 0$, $||u_n' - g||_p \to 0$ alors $u \in W^{1,p}(I)$ et $u' = g$.*

Démonstration. Cas $m = 1$. Avec la norme équivalente $T : f \mapsto (f, f')$ donne une isométrie avec $L^p(I) \oplus^1 L^p(I)$ qui est un espace de Banach. Or $Im(T)$ est fermée comme

$$Im(T) = \bigcap_{\varphi \in C_c^1} \{(f,g) : \int_I f\varphi' + \int_I g\varphi = 0\},$$

intersection de fermés, donc $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach. $Im(T)$ fermé s'interprète exactement comme le résultat de limite énoncé. On raisonne pareil pour $W^{m,p}(I)$. □

On résume les propriétés importantes dans le Théorème :

Théorème 43. *Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $u \in W^{1,p}(I)$, il existe un unique $v \in C^0(\overline{I})$ tel que $u = v$ p.p. sur I et $v(x) - v(y) = \int_y^x u'(t)dt, x, y \in \overline{I}$. On ne distingue donc pas u de v dans $W^{1,p}(I)$.*

1. *(prolongement) Il existe $P_I \in L(W^{1,p}(I), W^{1,p}(\mathbb{R}))$ tel que $(Pu)|_I = u$.*
2. *(densité) $C_c^\infty(\mathbb{R})|_I$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.*
3. *$u \mapsto v$ définit une injection continue pour $p > 1$: $W^{1,p}(I) \to C^{0,1/q}(I)$ avec $1/p + 1/q = 1$*
4. *(algèbre) Si $u, w \in W^{1,p}(I)$ alors $uw \in W^{1,p}(I)$ et $(uw)' = u'w + uw'$*
   Si de plus $G \in C^1(\mathbb{R}), G(0) = 0$,alors $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ et $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.
5. *L'adhérence de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$ est $W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{1,p}(I) | u = 0 \text{ sur } \partial I\}$.*

Démonstration. On pose $v_0(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$ pour un $y_0 \in I$ fixé. On sait que v_0 continue par convergence dominé (vu $u'1_K \in L^1$ pour tout compact K). Pour $\phi \in C_c^1(I)$, on décompose $I =]a, y_0] \cup [y_0, b[$ et on applique Fubini :

$$\int_I v\phi' = -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} u'(t)\phi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x u'(t)\phi'(x)dt = -\int_a^b u'(t)\phi(t)dt$$

Donc $\int_I (u - v_0)\phi' = 0$. Soit $f = (u - v_0)$ et $\psi \in C_c(I)$ positive avec $\int \psi = 1$ et voyons $f = \int_I f\psi$ p.p. de sorte que $v = v_0 + \int_I f\psi$ convient. Soit $w \in C_c(I)$,$w - (\int_I w)\psi$ est à support compact d'intégrale nulle et admet donc une primitive ϕ à support compact d'où on déduit :

$$0 = \int_I f(w - (\int_I w)\psi) = \int_I (f - \int_I f\psi)w.$$

Comme c'est pour tout $w \in C_c(I)$ le lemme 25 conclut à $f - \int_I f\psi = 0$ p.p.

Pour 1.2.4.5 cf TD, montrons 3. On sait que v continue, et par Hölder :

$$|v(x) - v(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right| \leq ||u'||_p |x - y|^{1/q}$$

d'où $v \in C^{0,1/q}(I)$ si on montre que $v \in L^\infty(I)$. Par prolongement de 1, $I = \mathbb{R}$ suffit. Soit $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, $G(s) = |s|^{p-1}s$, $G'(s) = p|s|^{p-1}$, $G(w) \in C_c^1(\mathbb{R})$ et $(G(w))' = G'(w)w' = p|v|^{p-1}v'$ donc $G(v(x)) = \int_{-\infty}^x p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$ donc par Hölder $|v(x)|^p \leq p||v||_p^{p-1}||v'||_p \leq ||v'||_p^p + (p-1)||v||_p^p$ donc $||v||_\infty \leq p^{1/p}||v||_{W^{1,p}(I)} \leq e^{1/e}||v||_{W^{1,p}(I)}$. Par densité si $v_n \to u$, on a v_n de Cauchy dans L^∞ donc converge, $v \in L^\infty$ et la relation s'étend. □

Chapitre 3

Théorèmes de Hahn-Banach et convexité

On suppose que E est un e.v. sur $\mathbb{R}$.

1 Théorème de Hahn-Banach, forme analytique

Théorème 44 (de prolongement de Hahn-Banach)**.** *Soient E un espace vectoriel, $p : E \to \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive, c'est-a-dire vérifiant :*

- $p(tx) = tp(x) x \in E, t > 0$
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y), x, y \in E.$

Soient $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire dominée par p :

$$\forall x \in G, g(x) \leq p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g (c'est-à-dire $\forall x \in G, g(x) = f(x)$) et encore dominée par p, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in E, f(x) \leq p(x).$$

On a évidemment une version complexe en étendant partie réelle et imaginaire.

Le plus souvent, on utilise le théorème sous la forme suivante (correspondant à son application à $p(x) = ||g||_{G'}||x||$) ou plus généralement pour p une semi-norme. Le cas général servira pour la version géométrique permettant de séparer des convexes.

Corollaire 45. *Soit E un e.v.n. et $G \subset E$ un sous-espace vectoriel. Soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue de norme*

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, ||x|| \leq 1} |g(x)|.$$

Alors il existe f forme linéaire continue sur E qui prolonge g et telle que

$$||f||_{E'} := \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} |f(x)| = \|g\|_{G'}.$$

1.1 Rappel sur le lemme de Zorn

Si on était en dimension finie, on voudrait faire une récurence sur la dimension de G en étendant à un espace de dimension 1 de plus. Une façon de rédiger la preuve est de considérer un sous-espace de dimension maximale et d'obtenir une contradiction en construisant un espace de dimension 1 de plus.

Dans le cas de la dimension infinie on pourrait faire une récurrence transfinie en complétant une base de G en une base de E et mettant un “bon ordre" sur la base. En analyse (ou en algèbre), on préfère souvent utiliser la conséquence suivante de l'axiome du choix, le lemme de Zorn, qui utilise une notion de maximalité pour obtenir une contradiction comme dans la preuve par induction.

Soit P muni d'un ordre partiel $\leq$. $Q \subset P$ est dit totalement ordonné si tout $a, b \in Q$ on a soit $a \leq b$, soit $b \leq a$. $c \in P$ est un majorant de Q si $\forall a \in Q, a \leq c$.

$m \in P$ est un élément maximal de P si tout $x \in P$ tel que $m \leq x$ on a $x = m$.

Enfin P est dit inductif si tout ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme 46. *(de Zorn) Tout ensemble ordonné, inductif, non vide admet un élément maximal.*

1.2 Preuve du théorème de Hahn-Banach

On considère l'ensemble P des paires (H, h) d'un espace vectoriel $G \subset H \subset E$ et d'une forme linéaire $h : H \to \mathbb{R}$ qui étend g et dominée par p soit $h(x) \leq p(x) pour x \in H$. On veut montrer que P contient une paire de la forme (E, f).

P est ordonné par la relation d'extension $(H_1, h_1) \leq (H_2, h_2)$ ssi $H_2 \subset H_2$ et h_2 prolonge h_1.

On va montrer que l'on peut appliquer le lemme de Zorn à P.

P est non-vide car (G, g) appartient à P.

Etape 1 : P est inductif (cela revient à l'étape union de l'argument par récurrence transfinie)

Si $(H_i, h_i)_{i \in I}$ est une chaîne d'éléments de P c'est-à-dire un ensemble totalement ordonné. On cherche un majorant de la chaîne de cette façon. On pose $H = \cup_{i \in I} H_i$ qui est bien un sous-espace vectoriel car toute pair d'éléments est dans un des termes de l'union croissante. On pose $h(x) = h_i(x)$ si $x \in H_i$. Ceci est possible car les h_i se prolongent l'un l'autre. En conséquence H contient tous les H_i et h prolonge tous les h_i donc $(H_i, h_i) \leq (H, h)$ et comme $h(x) = h_i(x) \leq p(x)$ on a bien $(H, h) \in P$ qui est donc un majorant des h_i.

Etape 2 : Obtenir une contradiction de la maximalité (cela revient à l'étape d'induction de l'argument par récurrence transfinie)

Soit par le lemme de Zorn (F, f) un élément maximal de P et supposons par l'absurde que $F \neq E$.

Soit $x \notin F$ et $H = F + \mathbb{R}x$. On pose $h(y + tx) = f(x) + t\alpha$ et on définit ainsi sur H une extension h de f. On cherche α pour que $(H, h) \in P$ ce qui contredira la maximalité de (F, f).

On doit donc trouver α tel que

$$f(y) + t\alpha \leq p(y + tx), x \in F, t \in \mathbb{R}.$$

C'est évident pour $t = 0$ et il suffit du cas $t = \pm 1$ car alors par linéarité de f et positive homogénéité de p :

$$f(y) + t\alpha = (f(y/|t|) + \alpha t/|t|)|t| \leq p(y/|t| + xt/|t|)|t| = p(y + tx)$$

Soit $\alpha = \sup_{y \in F} f(y) - p(y - x)$. Il reste à voir que

$$\alpha \leq \inf_{y \in F} p(y + x) - f(y).$$

Ceci est possible dès que l'on a l'inégalité souhaitée entre le sup et l'inf. Or si $x, y \in F$, par linéarité de f et inégalité triangulaire pour p :

$$f(z) + f(y) \leq p(z + y) \leq p(z + x) + p(y - x)$$

et donc

$$\forall z, y \in F, \quad f(y) - p(y - x) \leq p(z + x) - f(z).$$

En passant au sup sur y et à l'inf sur z on obtient l'inégalité souhaitée pour α. Ceci implique la contradiction qui force $F = E$ et donne l'extension souhaitée.

1.3 Application à l'Espace dual

Définition 18. L'espace $E' := L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur un e.v.n. E est munie de la norme d'opérateur

$$||f||_{E'} := \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} |f(x)|.$$

On a vu dans le chapitre précédent que c'est toujours un **espace de Banach**. Il sera très utile dans ce cours pour étudier E lui-même.

Le résultat suivant, conséquence de Hahn-Banach permet de décrire réciproquement la norme de E en terme de celle de E' :

Proposition 47. *Soit* $(E, ||.||_E)$ *un e.v.n., alors*

$$\|x\|_E = \sup_{f \in E', ||f||_{E'} \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in E', ||f||_{E'} \leq 1} |f(x)|.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\sup_{f \in E', ||f||_{E'} \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{f \in E', ||f||_{E'} \leq 1} ||f||_{E'} \|x\|_E = \|x\|_E.$$

Inversement, on applique Hahn-Banach à $G = \mathbb{R}x$ en posant $g(tx) = t||x||_E$ de sorte que $g(tx)|| \leq ||tx||_E$. Donc, il existe $f \in E'$ tel que $f(x) = g(x) = ||x||_E$ et $f(y) \leq ||y||_E$ c'est-à-dire $||f||_{E'} \leq 1$. En particulier, le sup est atteint en f et est donc un maximum. □

Un autre résultat de base permet d'associer à une application continue $u : E \to F$ une application (dite transposée ou adjoint) entre les duaux $u^t : F' \to E'$.

Proposition 48. *Si* $u : E \to F$ *est une application linéaire continue* $u^t(f) = f \circ u$ *définie une application linéaire continue* $u^t : F' \to E'$ *et on a*

$$|||u^t||| = |||u|||.$$

Démonstration. Par composition, si $f \in F'$, u linéaire continue, $f \circ u$ est linéaire continue donc appartient à E'. La linéarité en f est évidente. de plus $||u^t(f)(x)|| \leq ||f||_{F'}|||u|||||x||_E$ donc

$$||u^t(f)||_{E'} \leq ||f||_{F'}|||u|||.$$

Ceci donne $|||u^t||| \leq |||u|||$.

Réciproquement on utilise la proposition précédente pour obtenir :

$$||u(x)||_F = \sup_{||f||_{F'} \leq 1} |(u^t(f)(x))| \leq \sup_{||f||_{F'} \leq 1} ||(u^t(f)||_{E'}||x||_E \leq |||u^t|||||x||_E.$$

Ceci donne par définition de la norme subordonnée, l'autre inégalité : $|||u||| \leq |||u^t|||$.

□

1.4 Espace quotient, Orthogonalité. [Facultatif]

Une autre application de Hahn-Banach va nous permettre de calculer le dual d'un sous-espace d'un e.v.n. Il nous faut d'abord introduire la notion de norme quotient.

Définition 19. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Soit E/F l'espace vectoriel quotient formé des classes $p(x) := x + F, x \in E, p : E \to E/F$ munie de la structure vectorielle usuelle (rendant p linéaire)

$$\lambda p(x) + p(y) = p(\lambda x + y)$$

On munit E/F de la norme (dite norme quotient), donnant la topologie la plus forte rendant p continue :

$$||p(x)|| := \inf_{y \in F} ||x + y||.$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une norme. Si $||p(x)|| = 0$, il existe $y_n \in F$ tels que $||x - y_n|| \to 0$ donc $x \in F$, comme F est supposé fermé, et donc $P(x) = 0$ par définition.

$$||p(\lambda x)|| = \inf_{y \in F} ||\lambda(x) + y|| = \inf_{y \in F} ||\lambda(x + y)|| = |\lambda|||p(x)||.$$

Enfin, comme F est stable par somme :

$$||p(x + z)|| = \inf_{y_1, y_2 \in F} ||z + x + y_1 + y_2|| \leq \inf_{y_1, y_2 \in F} ||x + y_1|| + ||z + y_2|| = ||p(x)|| + ||p(z)||.$$

Les quotients vérifient la propriété universelle suivante :

Proposition 49. *Si $u : E \to G$ est une application linéaire continue et $F \subset Ker(u)$ alors il existe une unique application $u_F : E/F \to G$ telle que $u_F \circ P = u$.*

Démonstration. On pose $u_F(x + F) = u(x)$ qui est bien définie car $F \subset Ker(u)$, linéaire (unique) et continue par définition de la norme quotient. □

Le résultat de dualité entre les quotients et les sous-espaces est le suivant :

Définition 20. Soit E un e.v.n. et F un sous-espace de E et N un sous-espace de E'. Les orthogonaux de F et N sont les sous-espaces fermés :

$$F^{\perp} := \{f \in E', f(x) = 0 x \in F\},$$

$$^{\perp}N := \{x \in E, f(x) = 0 \forall f \in N\}.$$

Théorème 50. *Soit E un e.v.n. et F un sous-espace de E. Alors on a les isomorphismes isométriques*

$$F' \simeq E'/F^{\perp}, \quad (E/F)' \simeq F^{\perp},$$

la deuxième relation étant valable si F est fermé.

Démonstration. (1) Soit $f \in F'$, Hahn-Banach donne une extension $f^* \in E'$ la version plus précise de la première assertion revient à dire que $\sigma : f \mapsto f^* + F^{\perp}$ est l'isométrie cherchée entre F' et $E'/F^{\perp}$. D'abord, deux extensions f_1^*, f_2^* s'annulent sur F donc $f_1^* + F^{\perp} = f_2^* + F^{\perp}$ et σ est donc bien définie. σ est surjectif car pour tout f dans E', la restriction donne

$$\sigma(f|_F) = f + F^{\perp}.$$

Comme $\lambda f^* + g^*$ est une extension de $\lambda f + g$ si g^* extension de g on voit que σ est linéaire. Il reste à vérifier l'isométrie qui montrera aussi l'injectivité. Le théorème de Hahn-Banach donne une extension avec $||f^*|| = ||f||$ donc

$$||\sigma(f)|| \leq ||f||.$$

Réciproquement, Tout $g \in f^* + F^\perp$ étend f donc $||f|| = ||g|_F|| \leq ||g||$, donc en passant à l'inféмum intervenant dans la définition de la norme quotient, on obtient :

$$||f|| \leq ||\sigma(f)||.$$

(2) On obtient à présent le dual du quotient. Si $f \in F^\perp$, on définit l'unique forme linéaire sur le quotient telle que $\tau(f) \circ P = f$ (donnée par sa propriété universelle). Montrons que $\tau : F^\perp \to (E/F)'$ donne l'isométrie recherchée. Par l'unicité dans la propriété universelle, τ est linéaire, surjective car si $g \in (E/F)'$ $\tau(g \circ P) = g$. Enfin, on a la suite d'égalité :

$$||\tau(g)|| = \sup_{||P(x)||_{E/F} \leq 1} |\tau(g)(P(x))| = \sup_{||P(x)||_{E/F} \leq 1} |g(x)| = \sup_{||x||_E \leq 1} |g(x)| = ||g||$$

l'avant dernière égalité vient du fait que l'on peut choisir par définition de la norme quotient $x \in E$ avec $||x|| \leq 1 + \epsilon$ pour tout image $\|P(x)\| \leq 1$.

$\square$

Proposition 51. *Soient X, Y des e.v.n et $T \in L(X, Y)$. Alors*

$$Ker(T^t) = [Im(T)]^\perp \quad Ker(T) = {}^\perp[Im(T^t)].$$

Démonstration. En effet, $y \in Ker(T^t)$ ssi pour tout $x \in E$, $0 = [T^t(y)](x) = y(T(x))$ ssi $y \in [Im(T)]^\perp$.

De même, $y \in Ker(T)$ ssi pour tout $x \in E^*$, $0 = x[T(y)] = [T^t(x)(y)$ ssi $y \in {}^\perp[Im(T^t)]$. $\square$

2 Premières propriétés des ensembles convexes

Soit $x, y \in E$, on appelle segment d'extrémité x et y la partie

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}.$$

On retrouve bien sûr la définition usuelle dans $\mathbb{R}$.

Définition 21. Un ensemble $C \subset E, C \neq \emptyset$ est dit *convexe* si $\forall x, y \in C, [x, y] \subset C$.

Proposition 52. *Si E est un e.v.n., les boules (ouvertes et fermés) sont des convexes.*

Démonstration. Considérons le cas des boules ouvertes. Soient $x, y \in B(a, r)$, $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in [0, 1]$.

Par l'inégalité triangulaire et homogénéité, on a :

$$||z - a|| = ||\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)|| \leq |\lambda|||x - a|| + |1 - \lambda|||y - a|| < |\lambda|r + |1 - \lambda|r = r.$$

Donc $z \in B(a, r)$. Le cas des boules fermées est similaire. $\square$

Le résultat suivant est laissé en exercice.

Proposition 53. *Si C est convexe, alors son adhérence $\overline{A}$ et son intérieur $Int(A)$ sont convexes.*

2.1 Enveloppe convexe

Définition 22. L'enveloppe convexe d'un ensemble A, notée $Conv(A)$ ou $Co(A)$ est le plus petit convexe contenant A.

Explicitement, c'est l'union

$$Conv(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i, x_i \in A, avec \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

En effet cet ensemble contient A, est convexe et il est facile de voir que tout ensemble convexe est stable par combinaison convexe $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ avec $\sum t_i = 1, t_i \geq 0$ par récurrence sur n.

Proposition 54. *Soit E un espace de Banach et K un compact de E, alors $\overline{Conv(K)}$ est compact.*

Démonstration. Il suffit de voir que $\overline{Conv(K)}$ est précompact et complet, comme c'est un fermé d'un complet il est complet, donc il suffit de voir que $Conv(K)$ est précompact. On rappelle que cela veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_1, ..., x_n \in K$ tels que $Conv(K) \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. Comme K est précompact, on fixe $a_1, ..., a_n \in K$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^{n} B(a_i, \epsilon)$.

Or $(t_1, ...t_n) \mapsto \sum t_i a_i$ est continue donc envoie le compact $\{(t_1, ...t_n), t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$ sur un compact B de $Conv(K)$, Tout $x \in Conv(K)$ s'écrit $\sum_{i=1}^{m} t_i x_i$ en prenant a_{i_j} avec $x_i \in B(a_{j_i}, \epsilon)$. Donc $y = \sum_{i=1}^{m} t_i a_{j_i} \in B$ et $||x - y|| < \epsilon$. Si $y_1, ...y_k$ sont tels que $B \subset \cup_{i=1}^{k} B(y_i, \epsilon)$, on déduit que $Conv(K) \subset \cup_{i=1}^{k} B(y_i, 2\epsilon)$ donc $Conv(K)$ est précompact. □

2.2 Jauge de Minkowski d'un ensemble convexe

L'un des objectifs principaux de ce chapitre est d'utiliser le théorème de Hahn-Banach pour séparer des convexes par des hyperplans fermés, lieu d'annulation d'une forme linéaire continue. Pour cela, nous devons associer à un convexe une fonction (qui sera souvent une semi-norme) et que l'on pourra utiliser comme domination dans le théorème d'Hahn-Banach.

Définition 23. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v., un convexe $C \subset E$ est dit **absorbant** si pour tout $x \in E, x \in \lambda C$ pour un $\lambda > 0$.

Définition 24. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et C un convexe absorbant. La **jauge de Minkowski** de C est la fonction :

$$\mu_C(x) := \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1} x \in C\} \in [0, \infty)$$

Théorème 55. *Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et C un convexe absorbant. Alors*

1. $\mu_C(x + y) \leq \mu_C(x) + \mu_C(y)$.
2. $\mu_C(tx) = t\mu_C(x)$ *si* $t \geq 0$.
3. *Si* $-C = C$, μ_C *est une seminorme.*
4. *Si* $A = \{x : \mu_C(x) < 1\}, B = \{x : \mu_C(x) \leq 1\}$ *alors* $A \subset C \subset B$ *sont des convexes et* $\mu_A = \mu_B = \mu_C$
5. *Si E est un e.v.n. et $0 \in Int(C)$ (ce qui implique C absorbant), μ_C est continue et de plus*

$$A = Int(C), B = \overline{C}.$$

Démonstration. Soit $t = \mu_C(x) + \epsilon > 0$, $s = \mu_C(y) + \epsilon > 0$ de sorte que $x/t, y/s \in C$. Or on peut écrire la combinaison convexe suivante $\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t}\frac{x}{t} + \frac{s}{s+t}\frac{y}{s} \in C$ et donc $\mu_C(x+y) \leq s+t$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on déduit (1).

(2) est une conséquence directe de la définition. Si $-C = C$ $\mu_C(x) = \mu_C(-x)$ d'où on déduit $\mu_C(tx) = |t|\mu_C(x)$, la seule relation manquante pour (3).

Les inclusions entre A, B, C viennent de la définition : $x \in C$ donne $x/1 \in C$ et donc $\mu_C(x) \leq 1$ et si $\mu_C(x) < 1$, alors $x/1 \in C$. Elles impliquent $\mu_B \leq \mu_C \leq \mu_A$. Si $\mu_B(x) < s < t$ alors $x/s \in B$ donc $\mu_C(x/s) \leq 1$ donc $\mu_C(x/t) \leq s/t < 1$ d'où $x/t \in A$ donc $\mu_A(x) \leq t$ soit en passant à l'infemum des t, $\mu_A(x) \leq mu_B(x)$ ce qui donne la dernière égalité de (4). A, B convexes sont semblables à la convexité des boules en utilisant (1) et (2).

Pour (5), on remarque qu'il existe $B(0,\epsilon) \subset C$ donc $\mu_C(\epsilon x/||x||) \leq 1$ soit $\mu_C(x) \leq ||x||/\epsilon$.

De plus par l'inégalité triangulaire $\mu_C(x) \leq |\mu_C(x-y)| + \mu_C(y)$ et de même en inversant x, y donc

$$|\mu_C(x) - \mu_C(y)| \leq |\mu_C(x-y)| \leq ||x-y||/\epsilon$$

donc μ_C est $1/\epsilon$-lipschitzienne donc continue. On déduit que A est ouvert, B fermé et donc $A \subset Int(C), \overline{C} \subset B$. Or, soit ϵ, si $x \in B$ $x(1-1/n) \in C$ et converge vers $x \in \overline{C}$ donc $B \subset \overline{C}$. De même si $x \in A^c$, $(1+\epsilon)x \notin C$ donc $x \in \overline{C^c}$ donc $A^c \subset \overline{C^c}$ d'où en prenant le complémentaire $Int(C) \subset A$. □

Vous pouvez aussi en exercice essayer de montrer le résultat suivant directement.

Corollaire 56. *Soit C un convexe d'intérieur non vide d'un e.v.n., $Int(\overline{C}) = Int(C)$ et $\overline{Int(C)} = \overline{C}$.*

Démonstration. En translatant, on peut supposer $0 \in Int(C)$,, Alors comme $\mu_C = \mu_{Int(C)} = \mu_{\overline{C}}$, par le (5) ci-dessus, le calcul de l'intérieur/adhérence en terme de la jauge donne que ces trois ensembles ont même intérieur et même adhérence. □

3 Séparation des convexes, Théorème de Hahn-Banach : forme géométrique

Un élément $f \in E'$ tel que $f \neq 0$ permet de construire un hyperplan fermé (translation de $Ker(\phi)$, voir lemma 4) : $\{x \in E, f(x) = c\}$. Les deux ensembles $\{x \in E, f(x) \leq c\}$ et $\{x \in E, f(x) \geq c\}$ sont des demi-espaces. On dit que deux ensembles sont séparés (par l'hyperplan) si chaque ensemble est dans un des demi-espaces. On parle de séparation stricte si $C_1 \subset \{x \in E, f(x) < c\}$ et $C_2 \subset \{x \in E, f(x) > d\}$ pour $d > c$.

La version suivante du théorème de hahn-Banach permet de séparer des ensembles convexes bien choisis.

Théorème 57. *Soient A, B deux convexes non-vides disjoints d'un e.v.n. E, ils sont séparés par un hyperplan dans les deux cas suivants :*

1. *Si A est ouvert, alors il existe $f \in E'$ et $c \in I\!R$ telle que*

$$\forall x \in A, y \in B : f(x) < c \leq f(y).$$

2. *Si A est compact et B est fermé, alors il existe $f \in E'$ et $c < d \in I\!R$ telle que*

$$\forall x \in A, y \in B : f(x) < c < d < f(y).$$

Démonstration. 1) **Premier cas :** $B = \{x_0\}$.

On peut supposer que $0 \in A$ pour utiliser la fonctionnelle μ_A comme fonctionnelle sous-additive et positivement homogène p du théorème de Hahn Banach. Soit $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t$.

On remarque que $\mu_A(x_0) \geq 1$ car $A = Int(A) = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ par le théorème 55 et $x_0 \notin A$.

donc pour t>0 $g(tx_0) = t \leq t\mu_A(x_0) = \mu_A(tx_0)$ et pour $t \leq 0$ $g(tx_0) \leq 0 \leq \mu_A(tx_0)$. Donc on obtient la domination hypothèse de Hahn-Banach :

$$\forall x \in G, g(x) \leq \mu_A(x).$$

EN appliquant le théorème, on obtient donc f linéaire étendant g et telle que (en réutilisant la lipshitzianité obtenue dans la preuve du théorème 55 (5))

$$\forall x \in E, f(x) \leq \mu_A(x) \leq M||x||.$$

Ceci implique en particulier $f \in E^*$, $f(x) < 1$ pour $x \in A$ et $f(x) = 1$ sur B. Ce qui donne la séparation.

Second cas : B **quelconque.**

On pose $C = A - B$ qui est convexe, ouvert (comme union $\cup_{y \in B} A - y$) et $0 \notin C$. Donc d'après le premier cas il existe $f \in E'$ telle que $f(z) < 0$ pour $z = a - b \in A - B$ soit $f(a) < f(b)$ pour $a \in A$, $b \in B$. En passant au sup on obtient :

$$Sup_{x \in A} f(x) \leq Inf_{y \in B} f(y) := c.$$

De plus, comme A ouvert on obtient $A \subset Int(\{x : f(x) \leq c\}) = \{x : f(x) < c\}$.

2)Vérifions qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $A + B(0, \epsilon)$ et $B + B(0, \epsilon)$ soient disjoints (ce sont aussi des convexes ouverts comme au 1). Sinon, on trouve $x_n \in A + B(0, 1/n) \cap B + B(0, 1/n)$ donc $y_n \in A, z_n \in B$ avec $||y_n - x_n||, ||z_n - x_n|| \leq 1/n$. En extrayant par compacité une sous-suite $y_{n_k} \to y \in A$ on obtient $z_{n_k} \to y \in B$, une contradiction.

Donc on peut appliquer le cas 1) à $A + B(0, \epsilon)$ et $B + B(0, \epsilon)$. On obtient $f \in E'$ non-nulle telle que :

$$\forall a \in A, \forall z \in B(0, \epsilon), \forall b \in B : \quad f(a) + f(z) \leq \alpha \leq f(b) + f(z)$$

En prenant des sup sur la boule unité :

$$\forall a \in A, \forall b \in B : \quad f(a) + ||f||\epsilon \leq \alpha \leq f(b) - ||f||\epsilon.$$

Comme $||f|| \neq 0$, il suffit de prendre $c = \alpha - ||f||\epsilon/2 < d = \alpha + ||f||\epsilon/2$. □

3.1 Applications

La proposition suivante sera importante pour l'étude des topologies faibles au prochain chapitre. Il vient de l'application directe au cas $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ qui sont des compacts.

Proposition 58 (separation des points)**.** *E' sépare les points de E : Pour $x \neq y \in E$ il existe $f \in E'$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Le deuxième cas particulier permet de séparer un point et un espace fermé $\overline{F}$

Proposition 59. *Si $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de l'e.v.n. E. Si $x \notin \overline{F}$ alors il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = 1$ et $F \subset Ker(f)$.*

En particulier, $F^\perp = 0$ ssi F est dense dans E.

La proposition précédente a des conséquences intéressantes pour comprendre l'injectivité et la surjectivité (ou plutôt la densité de l'image) des applications linéaires en dimension infinie.

Proposition 60. *Soient X, Y des e.v.n et $T \in L(X,Y)$.*

1. *$Im(T)$ est dense dans Y si et seulement si T^t est injectif.*
2. *Si $X \subset Y$, ${}^{\perp}(X^{\perp}) = \overline{X}$ est la fermeture normique de X dans Y.*

Démonstration. Pour 1, T^t est injectif si et seulement si $Im(T)^{\perp} = Ker(T^t) = 0$ (proposition 51 ssi $Im(T)$ est dense par la proposition précédente.

Pour 2, $X \subset {}^{\perp}(X^{\perp})$ donc comme le terme de droite est fermé, l'adhérence est inclus. Réciproquement, soit $x \notin \overline{X}$ par la conséquence de Hahn-Banach ci-dessus, soit $f \in E'$ telle que $f(x) = 1$, et $f \in X^{\perp}$, on déduit que $x \notin {}^{\perp}(X^{\perp})$. □

On verra au chapitre suivant une version duale utilisant une topologie faible.

4 Fonctions semi-continues et convexes[preuves facultatives]

Il est pratique de considérer des fonctions $f : E \to]-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dans ce cas on parle de **domaine de** f :

$$D(f) = \{x \in E : f(x) < \infty\}.$$

Les propriétés que l'on considère dans cette section vont être déterminées par l'ensemble des valeurs au dessus du graphe de f, que l'on appelle **épigraphe de f** :

$$\mathrm{Epi}(f) = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}.$$

Définition 25. Soit E un espace topologique $f : E \to]-\infty, +\infty]$ est une **fonction semi-continue inférieurement** (s.c.i) si l'ensemble $\mathrm{Epi}(f)$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.

Si $C \subset E$ un sous-ensemble convexe d'un $\mathbb{R}$-e.v., $f : C \to]-\infty, +\infty]$ est dite **convexe** si $\mathrm{Epi}(f)$ est convexe.

Une fonction est dite **fonction semi-continue supérieurement** (s.c.s) (resp. concave) si -f est s.c.i (resp. convexe).

Proposition 61. *Soit E un espace topologique.*

1. *f est s.c.i si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, \lambda])$ est fermé.*
2. *f est continue ssi elle est s.c.i. et s.c.s.*
3. *Si f est s.c.i alors pour toute suite $x_n \to x \in E$ on a*
$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
La réciproque est vraie si E e.v.n.
4. *Si $\lambda > 0$ et E e.v.n., f, g s.c.i alors $\lambda f + g$ est s.c.i.*
5. *Si $f_i, i \in I$ sont s.c.i. alors l'enveloppe supérieure $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ est s.c.i*
6. *Si f est s.c.i et K compact de E alors f atteint sa borne inférieure sur K.*

Ce dernier résultat est peu pratique en dimension infinie car il y a peu de compacts. Les chapitres remédierons à ce problème.

Démonstration. (1) Si f s.c.i, $Epi(f) \cap (E \times \{\lambda\}) = \{(x, \lambda), x \in f^{-1}(]-\infty, \lambda])\}$ est fermé comme sa projection $f^{-1}(]-\infty, \lambda])$ sur la première coordonnée (une projection envoie un fermé sur un fermé).

Réciproquement, soit $(x_n, \lambda_n) \in Epi(f), x_n \to x, \lambda_n \to \lambda$ pour $(x, \lambda) \in \overline{Epi(f)}$ ($(x_n, \lambda_n)_{n \in I}$ une suite généralisée dans le cas où E n'est pas un e.v.n., par exemple I l'ensemble des voisinages de (x, λ) ordonnées par l'ordre inverse de l'inclusion. Par définition d'un point de l'adhérence, pour tout voisinage $n \in I$ il existe un point du voisinage dans $Epi(f)$ et on le prend comme x_n). En remplaçant λ_n par $\max(\lambda_n, \lambda)$, on peut supposer $\lambda_n \geq \lambda$. On a $f(x_n) \leq \lambda_n$ donc pour n grand $f(x_n) \leq \lambda + \epsilon$ donc comme $f^{-1}(]-\infty, \lambda+\epsilon])$ est fermé, on déduit $f(x) \leq \lambda + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ soit en passant à l'inf sur ϵ : $(x, \lambda) \in Epi(f)$

(2) f est continue ssi $f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, \infty[) \cap f^{-1}(]-\infty b[)$ est ouvert pour tout a,b, ssi ($f^{-1}(]a, \infty[)$ est ouvert pour tout a) et $f^{-1}(]-\infty, b[)$ est ouvert pour tout b et chaque relation signifie respectivement f est s.c.i. et f est s.c.s

(3) Par caractérisation séquentielle des fermés d'un e.v.n. $f^{-1}(]-\infty, \lambda])$ ssi pour toute suite $x_n \to x$ avec $f(x_n) \leq \lambda$ alors $f(x) \leq \lambda$. Si $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$, en passant à la liminf, on obtient $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lambda$, ce qui montre la propriété de fermeture souhaitée pour appliquer (1). Réciproquement, soit $\lambda > \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ donc il existe une sous-suite telle que $f(x_{n_k}) \leq \lambda$ d'où on déduit par fermeture (n'utilisant PAS E métrique) $f(x) \leq \lambda$ et comme λ est arbitraire, en prenant l'infémum sur λ :

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

(4) est facile avec (3).

(5) vient de la stabilité des fermés par intersection et de $f^{-1}(]-\infty, \lambda]) = \cap_{i \in I} f_i^{-1}(]-\infty, \lambda])$.

(6) Si t est la borne inférieure, les $F_n = K \cap f^{-1}(]-\infty, t + 1/n])$ sont des fermés non-vides donc $\{x \in K : f(x) = c\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. (rappel : sinon K est couvert par les ouverts $K - F_n$ on a un recouvrement fini et donc par décroissance un des F_n était vide.) □

On utilise les conventions $\infty + \infty = \infty$ et $\lambda.\infty = \infty$ si $\lambda > 0$.

Proposition 62. *Soit E un e.v. et $f : C \to]-\infty, \infty]$.*

1. *f est convexe si et seulement si pour tout $\lambda \in]0, 1[, x, y, \in E$,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

2. *Si $\lambda > 0$, f, g convexes alors $\lambda f + g$ est convexe.*
3. *Si $f_i, i \in I$ sont convexes alors l'enveloppe supérieure $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ est convexe.*
4. *f est convexe ssi $g : E \to]-\infty, +\infty]$, définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in C$ et $g(x) = +\infty$ sinon, est convexe.*
5. *Si f est strictement convexe (c'est-à-dire la caractérisation de (1) avec $<$ pour $x \neq y$), alors f a au plus un minimum sur C.*

Démonstration. Pour (1), l'énoncé est vide si $f(x)$ ou $f(y) = \infty$. Soit donc $(x, t_1), (y, t_2) \in Epi(f)$ (comme on veut $t_i < \infty$ cela utilise la réduction précédente). On remarque que $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \in Epi(f)$ ssi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$.

Si les epigraphes sont convexes, cette propriété est vérifiée et donc en prenant l'infemum sur t_1, t_2 (qui donne $f(x), f(y)$) on a le résultat. Si f vérifie l'inégalité, on utilise $f(x) \leq t_1, f(y) \leq t_2$ pour conclure :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2.$$

(2) est évident en utilisant (1).

(3) vient de la stabilité des convexes par intersection et de $Epi(f) = \cap_{i\in I} Epi(f_i)$.

(4) est évident car $Epi(f) = Epi(g)$.

(5) si $x \neq y$ sont deux minima, $f((x+y)/2) < (f(x)+f(y))/2$ contredisant la minimalité. $\square$

5 Propriétés différentielles des fonctions convexes.[preuves facultatives]

5.1 Rappel sur la différentiabilité au sens de Gâteaux et Fréchet

Définition 26. Soit E, F des e.v.n., $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$ est différentiable (au sens de Fréchet) en x si il existe $T \in L(E, F)$ notée df(x) telle que

$$||f(y) - f(x) - df(x)(y-x)|| = o(||x-y||), \quad si \quad x \to y.$$

f est C^1 (ou continuement différentiable) sur U si f est differentiable en tout $x \in U$ et $df : U \to L(E, F)$ est continue.

On rappelle que si $g : U \to V \subset F, f : V \to Z$ sont différentiables, alors $f \circ g$ aussi et $d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x)$. De plus si $Z = \mathbb{R}$ et f a un minimum local en $x \in V$ alors $df(x) = 0$.

Pour ce dernier résultat, on peut utiliser une notion plus faible de dérivée.

Définition 27. Soit E un e.v.n., $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to]-\infty, \infty]$ est dérivable en x au sens de Gâteaux si il existe $T \in E'$ notée $T = f'_G(x)$ telle que

$$\forall h \in E, \ \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T(h).$$

En générale, on appelle dérivée directionnelle (selon h en x) $D_h f(x) \in [-\infty, +\infty]$ la limite suivante si elle existe :

$$D_h f(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

On obtient la condition nécessaire usuelle de minimum, améliorée pour le cas de la minimisation sous contrainte.

5.2 Caractérisations des fonctions convexes

Proposition 63. *Si $f : E \to]-\infty, \infty]$ est convexe, pour tout $x \in dom(f)$ et tout $h \in E'$, la dérivée directionnelle $D'_h f(x)$ existe in $[-\infty, \infty]$ et vaut*

$$D'_h f(x) = \inf_{t>0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Démonstration. Il suffit de noter que $g(t) = \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ est croissante car $g(t) \leq g(s)$ se réécrit pour $0 < t < s$ en une inégalité de convexité :

$$f(x+th) = f(\frac{t}{s}(x+sh) + x(1-\frac{t}{s})) \leq f(x+sh)\frac{t}{s} + f(x)(1-\frac{t}{s}).$$

□

Le théorème suivant résume les 3 caractérisations principales de la convexité en terme de différentiabilité, par la position relative des plans tangents et du graphe, par la monotonie de la dérivée première ou par la positivité de la dérivée seconde :

Théorème 64. *Soit E un e.v.n. et U un ouvert convexe, $f : U \to I\!R$ une fonction dérivable au sens de Gâteaux en tout point de U.*

1. *f est convexe ssi pour tout $u, v \in U$:*

$$f(u) - f(v) \geq f'_G(v)[u-v]$$

2. *f est convexe ssi pour tout $u, v \in U$:*

$$[f'_G(u) - f'_G(v)][u-v] \geq 0$$

3. *Si f est en plus C^2, f est convexe ssi $d^2f(x)$ est positive pour tout $x \in U$ au sens où $d^2f(x)(h,h) \geq 0$ pour tout $x \in U, h \in E$.*

Démonstration. (1) Si f convexe, l'inégalité vient de la proposition précédente en comparant l'infemum à la valeur en $t = 1$. Réciproquement on applique l'inégalité en $z = tx + (1-t)y \in U$ par convexité pour $x, y \in U$ d'où :

$$(A) f(x) - f(z) \geq f'_G(z)[x-z], \quad (B) f(y) - f(z) \geq f'_G(z)[y-z],$$

et $t(A) + (1-t)(B)$ donne

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f(z) \geq f'_G(z)[t(x-z) + (1-t)(y-z)] = f'_G(z)(0) = 0$$

ce qui donne l'inégalité de convexité.

(2) Si f convexe, on utilise de même les inégalités de la proposition précédente :

$$f'_G(x)(y-x) \leq f(y) - f(x), \quad f'_G(y)(x-y) \leq f(x) - f(y)$$

En sommant, on obtient l'inégalité. Réciproquement, on utilise $\phi(t) = f(tx+(1-t)y)$ qui par Gâteaux dérivabilité est dérivalbe de dérivée $\phi'(t) = f'_G(tx + (1-t)y)(x-y)$ or si $t < s$

$$\begin{aligned}\phi'(s) - \phi'(t) &= [f'_G(y + s(x-y))(x-y) - f'_G(y + t(x-y))](x-y) \\ &= \frac{1}{s-t}[f'_G(y + s(x-y))(x-y) - f'_G(y + t(x-y))](y + s(x-y) - (y + t(x-y))) \geq 0\end{aligned}$$

Donc ϕ' est croissante et par un résultat à 1 variable ϕ est convexe.

(3)Si f est C^2, on dérive en t la relation du (2) avec $v = x$, $u = x + th$ une fois divisée par t^2 et on obtient $d^2f(x)(h,h) \geq 0$. Réciproquement, en dérivant en t $g(t) = f'_G(v + t(u-v))(u-v)$ et en appliquant le théorème fondamental du calcul :

$$[f'_G(u) - f'_G(v)][u-v] = g(1) - g(0) = \int_0^1 dt df(v + t(u-v))(u-v, u-v) \geq 0$$

et on retrouve le critère du (2). □

Nous rappelons le résultat à 1 variable que nous avons utilisé :

Proposition 65. *Si $E = I\!R$ et f est dérivable sur un ouvert convexe $U \subset E$ (donc un intervalle ouvert) alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*

Démonstration. Supposons f convexe. Soit $a < a+h < b < b+h$, montrons que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ (ce qui montre en prenant $h \to 0$ la croissance demandée). En découpant les intervalles, il suffit d'avoir pour $a < b < c$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(*)$

C'est une conséquence de $b = \frac{c-b}{c-a}a + c\frac{b-a}{c-a}$ d'où par l'inégalité de la remarque précédente caractérisant la convexité :

$$f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + f(c)\frac{b-a}{c-a} = f(a) + (f(c) - f(a))\frac{b-a}{c-a}$$

d'où $(*)$.

Réciproquement si f' croissante, montrons que f convexe, on veut voir $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ pour $a < b, \lambda \in]0,1[$. Par l'égalité des accroissements finis, la pente $\frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)-f(a)}{(1-\lambda)(b-a)}$ est atteinte par f' en un point de $]a, \lambda a + (1-\lambda)b[$, et de même $\frac{f(b)-f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{(\lambda(b-a)}$ est atteinte par f' en un point de $]\lambda a + (1-\lambda)b, b[$ donc par croissance de la dérivée :

$$\frac{f(\lambda a + (1-\lambda)b) - f(a)}{(1-\lambda)(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{\lambda(b-a)}$$

$$\iff f(\lambda a + (1-\lambda)b)(\frac{1}{(1-\lambda)(b-a)} + \frac{1}{\lambda(b-a)}) \leq \frac{f(a)}{(1-\lambda)(b-a)} + \frac{f(b)}{\lambda(b-a)}$$

$$\iff f(\lambda a + (1-\lambda)b)(\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}) \leq \frac{f(a)}{(1-\lambda)} + \frac{f(b)}{\lambda}.$$

Ceci conclut. □

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

1 Généralités

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 28. Un produit scalaire sur E est une application

$$\langle ., . \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$$

telle que :

1. pour tout $y \in H$, $\langle y, . \rangle : H \to \mathbb{K}$ est linéaire
2. - Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)
   - Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (symétrie hermitienne)
3. pour $x \in H$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$
4. pour $x \in H$, $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace H avec un tel produit scalaire est un espace préhilbertien réel (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

On remarque que dans le cas complexe, $\langle ., y \rangle$ est antilinéaire, c'est-à-dire avec $\overline{\lambda}$ le conjugé complexe,

$$\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \langle \lambda x + z, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle.$$

Exemple 20. Sur $H = \ell^2(I, \mathbb{C})$ on a le produit scalaire (hermitien canonique) :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \overline{x_i} y_i$$

Dans le cas réel, la même formule sans conjugaison complexe fonctionne.

Exemple 21. Sur $H = L^2(\Omega, \mu)$ avec (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini, on a le produit scalaire (hermitien canonique) :

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) d\mu(x).$$

Exemple 22. Sur $H = C^0([a, b], \mathbb{C})$ on a le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx).$$

Proposition 66. *Si H est muni d'un produit scalaire on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

avec égalité si et seulement si x,y sont liés. De plus $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur H vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2).$$

Démonstration. On a

$$\langle x+ty, x+ty\rangle = ||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) \geq 0$$

c'est un polynôme de degré 2 qui est toujours positif ou nul, donc son discriminant $\Delta = 4\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)^2 - 4||x||^2||y||^2 \leq 0$. En remplaçant y par uy avec $u = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$ si $\langle x,y\rangle \neq 0$ on obtient

$$\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle u) = |\langle x,y\rangle| \leq ||x||^2\langle uy,uy\rangle = ||x||^2||y||^2\overline{u}u = ||x||^2||y||^2.$$

Le même calcul donne pour u de module 1 la norme de

$$\|\ ||y||x - u||x||y\ \|^2 = 2||y||^2||x||^2 - 2||x||||y||\,\mathrm{Re}(\langle x,uy\rangle)$$

qui vaut 0 si on choisit u tel que $\langle x,y\rangle u = |\langle x,y\rangle|$ et que l'on est dans le cas d'égalité de C-S, ce qui donne la relation de dépendance linéaire cherchée $||y||x - u||x||y = 0$. (La réciproque l'égalité en cas de dépendance linéaire est évidente).

Le cas d'égalité correspond au cas où le discriminant est nul donc, pour vérifier que l'on a une norme, la séparation vient du dernier axiome, l'homogénéité vient de

$$\langle \lambda y, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle y,y\rangle = |\lambda|^2\langle y,y\rangle$$

et l'inégalité triangulaire de :

$$\langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| = (||x|| + ||y||)^2.$$

Enfin, on a aussi la relation :

$$\langle x-y, x-y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

soit en faisant la somme (avec l'égalité débutant le calcul pour l'inégalité triangulaire), on obtient l'identité du parallélogramme. □

Remarque 12. L'identité du parallélogramme implique que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \geq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2)$ avec égalité si et seulement si $x = y$ ce qui donne un résultat de convexité (stricte). (On a vu en TD que par continuité la convexité à mi point implique la convexité).

Une autre identité importante s'établit en prenant la différence des égalités donnant la preuve de l'identité du parallélogramme ci-dessus, c'est l'identité de polarisation :

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4}$$

On retrouve aussi

$$\Im\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \frac{||x+iy||^2 - ||x-iy||^2}{4}$$

d'où la formule de polarisation complexe :

$$\langle x, y\rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2}{4}$$

où encore en bref

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2 \tag{4.1}$$

Définition 29. Un espace pré-hilbertien complet est appelé espace de Hilbert.

Exemple 23. $\ell^2(I)$ et $L^2(\Omega, \mu)$ sont des espaces de Hilbert (cf. chapitre 1 pour la complétude), mais pas $C^0([a, b], \mathbb{C})$ dont la complétion est l'espace de Hilbert $L^2([a, b], Leb)$. La complétion d'un espace préhilbertien en tant qu'e.v.n. (cf. chapitre suivant) est toujours un espace de Hilbert.

2 Projection sur un convexe fermé

On va généraliser l'existence de projection orthogonale sur une sous-espace d'un espace euclidien d'abord au cas des convexes et en dimension infinie.

Théorème 67. *Soit H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non-vide. Pour tout $f \in H$ il existe un unique $u = P_C(f)$ tel que*

$$||f - u|| = \inf_{v\in C} ||f - v||.$$

De plus c'est l'unique vecteur $u \in C$ tel que

$$\forall v \in C, \quad \mathrm{Re}(\langle f - u, v - u\rangle) \leq 0$$

Enfin, P_C est une application 1-lipschitzienne appelée ***projection sur*** *C.*

Démonstration. Pour montrer l'existence, si on savait que H est réflexif, on pourrait utiliser le théorème 91, mais comme on ne le sait pas encore et qu'on va le déduire de notre théorème de projection, on fait une preuve directe, utilisant l'identité du parallélogramme.

Soit $v_n \in C$ tel que $||f - v_n|| \to d = \inf_{v\in C} ||f - v||$

En appliquant l'identité à $a = f - v_n, b = f - v_m$, on trouve :

$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(||f - v_n||^2 + ||f - v_m||^2) \to d^2.$$

Or par convexité $\frac{v_n+v_m}{2} \in C$ donc $\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 \geq d^2$ donc

$$\left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(||f - v_n||^2 + ||f - v_m||^2) - d^2 \to 0.$$

On déduit donc que v_n est de Cauchy, donc converge vers u et par continuité de la norme $d = ||f - u||$.

Soit $g : v \mapsto ||f-v||_2^2$. On peut calculer la différentielle $dg(u) = \mathrm{Re}(\langle f-u, .\rangle)$. Or si g atteint son minimum en u, pour $v \in C$, $t \in [0,1]$,

$$||f - tv - (1-t)u||_2^2 = ||f-u||_2^2 + t^2||v-u||_2^2 - 2t\,\mathrm{Re}(\langle f-u, v-u\rangle) \geq ||f-u||_2^2$$

donc $2\,\mathrm{Re}(\langle f-u, t-u\rangle) \leq t||v-u||_2^2$ et la limite $t \to 0$ donne l'inégalité caractéristique. Réciproquement, on a en $t = 1$, l'inégalité qui conclut :

$$||f-u||_2^2 - ||f-v||_2^2 = 2\,\mathrm{Re}(\langle f-u, v-u\rangle) - ||v-u||_2^2 \leq 0.$$

Pour voir l'unicité, si $u_1, u_2 \in C$, on peut utiliser la convexité stricte sous la forme de l'identité du parallélogramme, on a

$$\left\| f - \frac{u_1+u_2}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u_1-u_2}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(||f-u_1||^2 + ||f-u_2||^2) = d^2$$

soit comme $\left\| f - \frac{u_1+u_2}{2} \right\|^2 \geq d^2$ on déduit $\left\| \frac{u_1-u_2}{2} \right\|^2 \leq 0$ donc $u_1 = u_2$.

Par l'unicité, P_C est bien définie et il ne reste qu'à voir la lipschitizianité. En appliquant la propriété caractéristique pour f_1, f_2 :

$$\mathrm{Re}(\langle f_1 - P_C(f_1), P_C(f_2) - P_C(f_1)\rangle) \leq 0,$$
$$\mathrm{Re}(\langle f_2 - P_C(f_2), P_C(f_1) - P_C(f_2)\rangle) \leq 0,$$

soit en aditionnant :

$$\mathrm{Re}(\langle f_1 - f_2 + P_C(f_2) - P_C(f_1), P_C(f_2) - P_C(f_1)\rangle) \leq 0$$

soit en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$||P_C(f_2) - P_C(f_1)||^2 \leq \mathrm{Re}(\langle f_1 - f_2, P_C(f_2) - P_C(f_1)\rangle) \leq ||f_1 - f_2||\ ||P_C(f_2) - P_C(f_1)||.$$

□

Théorème 68. *Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un sous espace vectoriel fermé. Pour tout $f \in H$ il existe un unique $u = P_K(f)$ tel que*

$$||f-u||_2 = \inf_{v \in K} ||f-g||_2.$$

De plus c'est l'unique vecteur $u \in K$ tel que

$$\forall v \in K, \quad \langle v, f-u\rangle = 0$$

Enfin, P_K est une application linéaire bornée appelée ***projection orthogonale sur*** *K.*

Démonstration. Il reste à voir la nouvelle caractérisation équivalente car celle-ci étant une relation linéaire, elle impose la linéarité de P_K ($\lambda P_K(f) + P_K(g)$ vérifie la relation pour $\lambda f + g$ et doit donc être par unicité $P_K(\lambda f + g)$). La nouvelle caractérisation est plus forte. Réciproquement, si $\mathrm{Re}(\langle f-u, v-u\rangle) \leq 0$, en prenant $v = 2u$ et $v = 0$, on trouve $\mathrm{Re}(\langle f-u, u\rangle) = 0$ donc $\mathrm{Re}(\langle f-u, v\rangle) \leq 0$ pour tout v dans K donc aussi pour $-v$ par linéarité d'où l'égalité à 0. □

Exemple 24. Si $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$

$$C = \{f \geq 0\ p.p.\}.$$

Alors $P_C(f) = f1_{\{f \geq 0\}}$. (exo) Trouver aussi de même la projection sur l'ensemble de $f : \Omega \to [0,1]$.

3 Dualité : le théorème de représentation de Riesz

On en déduit maintenant le calcul du dual de H (voir sous-section 1.2 pour des rappels).

Théorème 69. *Soit ϕ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H alors il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \phi(v) = \langle f, v\rangle.$$

De plus, on a l'expression duale pour la norme :

$$||f|| = \sup_{||v||\leq 1} |\langle f, v\rangle|.$$

Remarque 13. Dans le cas complexe, $f \mapsto \langle f, .\rangle$ est une isométrie antilinéaire identifiant H et H' (et donc identifiant linéairement H' au conjugué $\overline{H}$ ayant la même structure normique et de groupe mais $\lambda.\overline{v} = \overline{\overline{\lambda}v}$ si $v \mapsto \overline{v}$ est la bijection/identité de $H \to \overline{H}$ notée $\bar{\cdot}$ pour le caractère suggestif de la relation à la conjugaison complexe). Dans la cas complexe on a donc $H' \simeq \overline{H}$ et dans le cas réel $H' \simeq H$.

Preuve : Soit $K = \phi^{-1}(0)$ le noyau de ϕ. Si $K = H$ alors $f = 0$ convient. On suppose donc $K \neq H$. Soit donc $g_0 \notin K$ et $g = \frac{g_0 - P_K(g_0)}{||g_0 - P_K(g_0)||_2}$ un vecteur de norme 1 et orthogonal à K. Comme ϕ est une forme linéaire, on s'attend à ce que K et g engendrent L^2, sorte de généralisation du théorème du rang (on va voir cela plus loin en utilisant l'orthogonalité). En effet, soit $v \in H$, $w = v - \frac{\phi(v)}{\phi(g)}g$ vérifie $\phi(w) = \phi(v) - \frac{\phi(v)}{\phi(g)}\phi(g) = 0$ donc $w \in K = Ker\phi$ et $v = \lambda g + w$ avec $\lambda = \frac{\phi(v)}{\phi(g)}$.

On montre donc que $f = \overline{\phi(g)}g$ convient en montrant l'égalité sur v quelconque précédent :

$$\langle f, v\rangle = \phi(g)\langle g, v\rangle = \phi(g)\langle g, \lambda g + w\rangle = \phi(g)\lambda||g||_2^2 = \phi(g)\lambda = \phi(v).$$

L'égalité des normes vient de Cauchy Schwarz qui implique que $\geq$ avec égalité en prenant $v = f/||f||$ si $f \neq 0$. ■

Remarque 14. Il n'est parfois pas judicieux d'identifier un espace de Hilbert à son dual, notamment quand plusieurs espaces de Hilbert sont considérés et que les identifications sont incompatibles à des relations de sous-espaces. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $K = \{u \in H, \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2|u_n|^2 < \infty\}$ Si on considère l'ensemble des suites telles que $L = \{(u_n) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}|u_n|^2 < \infty\}$. Il est facile de voir que $K \subset H \subset L$ et que La transposé de l'inclusion $K \subset H$ s'identifie à $H \simeq H' \subset K' \simeq L$. Il vaut alors mieux identifier K' à L (et pas K) en ayant une identification compatible avec les inclusions avec H.

3.1 Adjoint

On note $B(H) = L(H, H)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur H. On parle aussi d'opérateur borné. La définition suivante de l'adjoint T^*, est une variante de la transposé pour les espaces de Hilbert :

Proposition 70. *Soit $T \in B(H)$, il existe $T^* \in B(H)$ unique telle que pour tout $x, y \in H$*

$$\langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle.$$

De plus on a $||T^*|| = ||T||$ égalité des normes d'opérateurs et $\overline{T^*(u)} = T^t(\overline{u})$ si on identifie $\overline{u} \in \overline{H} \simeq H'$ avec $\langle u, .\rangle$ comme dans le théorème de Riesz.

Démonstration. Comme les identifications sont des isométries, la relations $\overline{T^*(u)} = T^t(\overline{u})$ définit uniquement T^* ce qui donne $||T^*|| = ||T|| = ||T^t||$. Par définition $\langle T^*(x), .\rangle$ est l'image de $\overline{T^*(u)}$, la définition de T^t dit donc que l'équation de définition s'écrit

$$\langle T^*(x), .\rangle = T^t(\langle u, .\rangle = \langle u, .\rangle \circ T = \langle u, T(.)\rangle.$$

ce qui est la propriété caractéristique cherchée.

Alternativement, on peut reprendre directement la preuve de la définition de T^t. $\langle x, T(.)\rangle$ est par composition une forme linéaire continue donc par le théorème de Riesz, il existe un unique $T^*(x) \in H$ tel que

$$\langle T^*(x), .\rangle = \langle x, T(.)\rangle.$$

Par unicité on voit que T^* est linéaire ($\lambda T^*(x) + T^*(z)$ vérifie la caractérisation de $T^*(\lambda x + z)$). Pour la norme on utilise la caractérisation duale :

$$||T^*|| = \sup_{||x||\leq 1} ||T^*(x)|| = \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |\langle T^*(x), y\rangle| == \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |\langle y, T(x)\rangle| = ||T||.$$

□

Définition 30. Un opérateur T est dit *auto-adjoint* si $T = T^*$ (et parfois symétrique si $K = \mathbb{R}$ et hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). u est **unitaire** si $uu^* = u^*u = I$.

Un opérateur auto-adjoint est dit *positif* si pour tout $x \in H$

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0.$$

Remarque 15. Cela n'a rien à voir si $H = L^2(\Omega)$ avec le terme positif employé pour dire $f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$. Par contre si $T = m_f$ avec $f \in L^\infty(\Omega)$ l'application de multiplication par f : $m_f(x) = fx$. Alors $(m_f)^* = m_{\overline{f}}$ et, m_f est positif si et seulement si $\int f|h|^2 \geq 0$ pour tout $h \in L^2$ ce qui équivaut à $f \geq 0$ p.s.

En général, T^*T est toujours positif et c'est l'un des buts de la théorie spectrale de définir une racine carré pour montrer que tout opérateur positif est de cette forme.

Proposition 71. *On a $I^* = I$ et $T \mapsto T^*$ est une isométrie antilinéaire telle que $(TS)^* = S^*T^*, (T^*)^* = T$. De plus $||T^*T|| = ||TT^*|| = ||T||^2$ et si $H \neq \{0\}$ pour tout $T = T^*$ auto-adjoint, on a*

$$||T|| = \sup_{||x||\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Démonstration. Les premières relations sont évidentes par l'unicité de la caractérisation de T^*, il suffit de vérifier que la formule donne la caractérisation souhaitée. En général par sous-multiplicativité de la norme d'opérateur, on obtient $||T^*T|| \leq ||T^*||||T|| = ||T||^2$. Réciproquement par Cauchy-Schwarz, $||Tx||^2 = \langle x, T^*Tx\rangle \leq ||T^*T||||x||^2$ en en prenant le sup sur $||x|| \leq 1$ on trouve $||T||^2 \leq ||T^*T||$ d'où l'égalité. Si T est hermitien, en utlisant l'identité de polarisation pour l'application bilinéaire symétrique $\mathrm{Re}\langle T., .\rangle$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Re}\langle Tx, ty\rangle = \frac{\langle T(x+ty), x+ty\rangle - \langle T(x-ty), x-ty\rangle}{2} \leq d\frac{||x+ty||_2^2 + ||x-ty||_2^2}{2} = d\frac{||x||^2 + t^2||y||^2}{2}$$

la dernière égalité venant de l'identité du parallélogramme. La condition de positivité d'un polynôme de degré 2 donne

$$|\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| \leq d||x||||y||.$$

Donc en penant le sup sur x, y dans la boule unité $||T|| \leq d$. l'autre inégalité est évidente par Cauchy-Schwarz. □

3.2 Orthogonalité

En utilisant le théorème de Riesz, on peut définir un orthogonal interne à H (coïncidant avec le préorthogonal) et déduire les relations correspondantes que nous avons vues dans le cas espace de Banach :

Définition 31. Si $F \subset H$ est un sous-espace, alors l'orthogonal de K est

$$F^{\perp} = \{x \in H, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$$

On dit que x est orthogonal à F si $x \in F^{\perp}$.

Proposition 72. *Si F est un sous-espace de H alors $F^{\perp\perp} = \overline{F}$, et on a la somme directe orthogonale*

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$$

et alors p_F et $p_{F^{\perp}} = 1 - p_{\overline{F}}$ sont les projections associées à cette décomposition.

Si $T \in B(H)$, alors

$$Ker(T) = Im(T^*)^{\perp}.$$

Démonstration. La seule relation nouvelle est la somme directe orthogonale : si $x \in F^{\perp\perp} \cap F^{\perp}$ alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$ et si $y \in H$ la relation caractéristique de la projection othogonale dit que $y - p_{\overline{F}}(y)$ est orthogonal à $\overline{F}$ donc dans $F^{\perp}$ et comme $y - (y - p_{\overline{F}}(y)) = p_{\overline{F}}(y)$ est orthogonal à $F^{\perp}$ ce doit être $p_{F^{\perp}}(y)$ par caractérisation de la projection. Cela donne la relation entre les projecteurs et

$$y = p_{F^{\perp}}(y) + p_{\overline{F}}(y)$$

ce qui montre que H est une somme directe. □

4 Bases Hilbertiennes

Définition 32. Soit H un espace préhilbertien. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *orthogonale* si pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

Si de plus $||x_i|| = 1$, elle est dite *orthonormale.*

Une *base hilbertienne* (ou base orthonormale) de H est une famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ telle que $Vect(e_i, i \in I)$ est dense dans H.

Exemple 25. e_i la suite dont la seule coordonnée non-nulle est la i-ème égale à 1 donne une base hilbertienne de $\ell^2(I)$.

Exemple 26. $e_n(x) = \exp(inx), n \in \mathbb{Z}$ définit une base hilbertienne de l'espace pré-hilbertien $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

C'est la base des décompositions en série de Fourier. Le but est de décomposer de façon similaire tout vecteur de H comme somme d'une série en fonction d'une base.

Exemple 27. Montrons que $e_n(x) = \exp(inx), n \in \mathbb{Z}$ forme une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$

D'abord, on sait que $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ identifié par restriction est dense car il contient $C^0_c(]0, 2\pi[)$ qui est dense par la proposition 25. Il s'agit donc de la complétion de l'exemple précédent.

Ensuite on vérifie l'orthonormalité :

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp(i(m-n)t)dt = 1_{\{m=n\}}.$$

Enfin, il reste à voir que $Vect(e_n)$ est dense. Or, on a $Vect(e_n) = \{P(e^{ix}, e^{-ix}), P \in \mathbb{C}[X, Y]\} = \{P(\cos(x), \sin(x)), P \in \mathbb{C}[X, Y]\}$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$, soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ On définit $g : D \to \mathbb{C}$ par $g(\cos(x), \sin(x)) = f(x)$. Il est facile de voir que g continue sur D (utiliser tan, cot selon le point comme carte coordonnée) donc par le théorème d'approximation de Weierstrass 36, il existe un polynôme P tel que $||P - g||_\infty \leq \epsilon$ donc, si $Q = P(\cos(.), \sin(.)) \in Vect(e_n)$, on a $||Q - f||_2 \leq ||Q - f||_\infty \leq ||P - g||_\infty \leq \epsilon$. D'où la densité voulue.

C'est la base des décompositions en série de Fourier qui sera étudiée au second semestre.

Théorème 73. *Soit H un espace préhilbertien.*

1. *Une famille orthonormale $(x_i)_{i\in I}$ est libre et vérifie l'inégalité de Bessel, pour tout $x \in H$:*

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

2. *De plus une famille orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si on a l'égalité de Bessel-Parseval :*

$$\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 = ||x||^2$$

De plus, dans ce cas, pour tout $x \in H$, la série suivante converge (dans H mais pas absolument)

$$x = \sum_{i\in I} e_i\langle e_i, x\rangle.$$

3. *Si H est un espace de Hilbert, toute famille orthonormale peut être complétée en une base hilbertienne de H et $J : x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ établit alors une isométrie surjective $J : H \simeq \ell^2(I)$.*

Remarque 16. De la formule pour x, on tire par continuité la formule pour le produit scalaire (qui est série absolument convergente par Cauchy-Schwarz) :

$$\langle y, x\rangle = \sum_{i\in I}\langle y, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle.$$

Démonstration. (1) Si $\sum \lambda_i x_i = 0$, on calcule $\lambda_j = \langle\sum \lambda_i x_i, x_j\rangle = 0$ donc x_i est bien libre. Si F est une partie finie de I, et $V = V_F = Vect(e_i, i \in F)$,

$$\langle e_j, x - \sum_{i\in F} e_i\langle e_i, x\rangle\rangle = 0$$

donc $x - \sum_{i\in F} e_i\langle e_i, x\rangle \in V^\perp$ donc par caractérisation de la projection orthogonale

$$p_V(x) = \sum_{i\in F} e_i\langle e_i, x\rangle.$$

Donc par la propriété de contraction et l'ortogonalité

$$||p_F(x)||^2 = \Big\langle \sum_{i\in F} e_i\langle e_i, x\rangle, \sum_{j\in F} e_j\langle e_j, x\rangle\Big\rangle = \sum_{i\in F} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

la famille est donc sommable et on a l'inégalité de Bessel pour la somme et on trouve en particulier $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I)$.

(2) Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base soit $x_n \in Vect(e_i, i \in I)$ convergeant vers x.

De plus, pour n assez grand $|||x||^2 - ||x_n||^2| \leq \epsilon/2$ et pour tout J,

$$|||p_{V_J}(x)||^2 - ||p_{V_J}(x_n)||^2| \leq ||p_{V_J}(x_n - x)||(||x_n|| + ||x||) \leq ||(x_n - x)||(||x_n|| + ||x||) \leq \epsilon/2$$

d'où en prenant J tel que $p_{V_J}(x_n) = x_n$ on obtient

$$\left|\sum_{i\in J} |\langle e_j, x\rangle|^2 - ||x||^2\right| \leq \epsilon$$

et donc la somme de la série est $||x||$ d'où l'égalité de Parseval.

Réciproquement, Si on a égalité, on trouve J_n tel que

$$\sum_{j\in J_n} |\langle e_j, x\rangle|^2 = ||p_{V_{J_n}}(x)||^2 \to ||x||^2$$

et ceci implique par le théorème de Pythagore :

$$||p_{V_{J_n}}(x) - x||_2^2 = ||x||_2^2 - ||p_{V_{J_n}}(x)||_2^2 \to 0$$

donc tout élément de H est limite d'éléments de $Vect(e_i, i \in I)$ d'où la propriété de base hilbertienne.

De plus un calcul donne la formule pour x :

$$||x - \sum_{i\in F} e_i\langle e_i, x\rangle||^2 = \sum_{i\notin F} |\langle e_i, x\rangle|^2 \to 0.$$

(3) Considérons l'ensemble des familles orthogonales contenant une famille orthogonale donnée, et ordonné par inclusion. C'est un ensemble non-vide. Si on a une famille totalement ordonnée de familles orthonormales, l'union est un majorant, donc l'ensemble ordonné est inductif, il admet donc par le lemme de Zorn un élément maximal $(e_i)_{i\in I}$. Si ce n'était pas une base (complétant la famille orthonormale de départ), on aurait un x avec

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 < ||x||^2.$$

Comme H est complet la somme $y = \sum_{i\in I} e_i\langle e_i, x\rangle$ converge car si (I_n) croissante telle que $\sum_{i\in I_n} |\langle e_i, x\rangle|^2 \to \sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2$ la suite $y_n = \sum_{i\in I_n} e_i\langle e_i, x\rangle$ est de Cauchy car pour $q > p$

$$||y_p - y_q||_2^2 = \sum_{i\in I_q - I_p} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \sum_{i\notin I_p} |\langle e_i, x\rangle|^2 \to 0.$$

On déduit que $y-x$ est orthogonal à tout e_i car tout i tel que $\langle e_i, x\rangle \neq 0$ est dans un I_n et que $\langle y_n - x, e_i\rangle = 0$ pour n assez grand pour un tel i. Donc par orthogonalité

$$||y-x||_2^2 = ||x||^2 - \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 > 0$$

donc ajouter $(y-x)/||y-x||$ à la famille orthonormale contredit la maximalité et conclut.

Une fois l'existence d'une base, l'isométrie est évidente par le (2), et si on a une suite $(\lambda_i)_{i\in I}$ dans $\ell^2(I)$, on voit que $\sum \lambda_i e_i$ converge par complétude comme ci-dessus et on obtient ainsi la surjectivité. □

5 Théorème de Lax-Milgram

Définition 33. Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert réel H est dite *continue* si $|a(u,v)| \leq C||u||||v||$ pour $C < \infty, u, v \in H$ et *coercive* si $a(u,u) \geq \alpha ||u||^2, \alpha > 0, u \in H$

Théorème 74. *Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive sur un espace de Hilbert H. Alors pour tout $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$a(u,v) = \langle \phi, v\rangle, \forall v \in H.$$

De plus si $a(u,v) = a(v,u)$, u l'est l'unique élément de H minimisant $\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v\rangle$.

Démonstration. Comme $v \mapsto a(u,v)$ est linéaire continue sur H, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $Au \in H$ tel que $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$. Par bilinéarité de a, on déduit A est linéaire, borné par continuité de A. On a en fait $||Au|| \leq C||u||$ et résoudre l'équation revient à résoudre $Au = \phi$ (si ϕ identifié par le Th. de Riesz à un élément de H). Comme $\alpha||u||^2 \leq ||Au||||u||$, montrons que $Im(A)$ est fermé car si $A(x_n) \to y$ alors $||x_n - x_m|| \leq ||Ax_n - Ax_m||/\alpha$, donc x_n de Cauchy, $x_n \to x$ et par continuité de A, $y = Ax$. Enfin calculons $Im(A)^\perp = \{0\}$. En effet, si $\langle Au, v\rangle = 0$ pour tout u, on a $\alpha||v||^2 \leq a(v,v) = 0$ donc $v = 0$. Donc $Im(A) = \overline{Im(A)} = \overline{Im(A)} \oplus Im(A)^\perp = H$, A est surjectif. La surjectivité implique l'existence de u avec $Au = \phi$. Or, dans le cas symétrique, $\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v\rangle = \frac{1}{2}\langle Av - 2Au, v\rangle = \frac{1}{2}\langle Av - Au, (v-u)\rangle - \frac{1}{2}\langle Au, Au\rangle \geq -\frac{1}{2}\langle Au, Au\rangle$ est minimum si et seulement si $v - u = 0$ vu que un minimum vérifie $a(v-u, v-u) = 0$ donnant par coercivité $||v-u|| = 0$. □

5.1 Application au problème de Sturm-Liouville

On cherche à résoudre sur $]0,1[$ l'EDP :

$$-(pu')' + qu = f \quad sur \quad]0,1[\tag{4.2}$$

avec condition au bord de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$ pour $p \in C^1([0,1]), q \in C^0([0,1])$, $p(x) \geq \alpha > 0, q(x) \geq \alpha > 0$. Pour chercher une solution classique $u \in C^2([0,1])$ il faut $f \in C^0([0,1])$. Cependant pour utiliser des techniques hilbertienne, il est souhaitable de définir une notion de solution faible qui permettra de résoudre (4.2) pour $f \in L^2([0,1])$. On va chercher une solution $u \in H_0^1(]0,1[) := W_0^{1,2}(]0,1[)$. On a vu au chapitre 2 que c'est un espace de Banach et il est facile de voir que c'est un espace de Hilbert. On a aussi vu que c'est un sous-espace de $C^0([0,1])$ satisfaisant $u(0) = u(1) = 0$

d'où la prise en compte de la condition au bord. Si u est une solution C^2 on a pour $v \in H_0^1(]0,1[)$ (en commençant par $v \in C_c^1(]0,1[)$ et en raisonnant par densité) :

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv.$$

C'est la définition de solution faible que l'on prend. On pose

$$a(u,u) = \int_I p(u')^2 + \int_I qu^2 \geq \alpha ||u||_{W^{1,2}(I)}$$

donc c'est une forme coercive et comme par compacité, $p, q \in L^\infty$, a est aussi continue, donc par le Théorème de Lax-Milgram, il existe une solution faible $u \in H_0^1(]0,1[)$ vu que $v \mapsto \int_I fv$ est continue. On a dans cet espace l'équation caractérisant $(pu')' = f - qu \in L^2$ en particulier $pu' \in W^{1,2}$ or comme $1/p \in C^1([0,1]) \subset W^{1,2}$, par le Théorème 43 (4) $u' = 1/p.pu' \in H^1$ donc $u' \in C^0$. Si de plus $f \in C^0$, $f - qu \in C^0$ donc $(pu')' \in C^0$ donc il est facile de voir que la version continue de pu' obtenu en intégrant est C^1 et donc de même $u' \in C^1$ d'où $u \in C^2$. Enfin on obtient pour $f \in C^0([0,1])$ une solution classique en intégrant par partie en prenant la relation de solution faible pour $v = \phi \in C^1([a,b]) \cap H_0^1(]0,1[)$, on a :$\int_0^1 (-(pu')' + qu - f)\phi = 0$ qui s'étend par densité à $\phi \in C_c^0$ et donc par le lemme 25, on a $(-(pu')' + qu - f) = 0$ p.p. puis partout par continuité.

Chapitre 5

Espaces de Banach

On a déjà défini et donné des exemples d'espaces de Banach, c'est-à-dire d'espaces vectoriels normés complets, aux chapitres 2 et 3. Le but de ce chapitre est d'étudier leurs propriétés générales pour mieux comprendre les applications linéaires continues et la dualité.

1 Dual et Bidual

1.1 Espace dual

Définition 34. L'espace $E' := L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur un e.v.n. E est munie de la norme d'opérateur

$$||f||_{E'} := \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} |f(x)|.$$

On a vu au chapitre 2 que c'est toujours un **espace de Banach**.

Exemple 28. On a vu en TD que $(\ell^p(\mathbb{N}))' = \ell^q(\mathbb{N})$ pour $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

On étudiera la dualité des espaces L^p dans le dernier chapitre. Le résultat suivant donne un exemple de calcul de dual :

Proposition 75. *Le dual de* $c_0(I)$ *est isométrique à*

$$\ell^1(I) \simeq (c_0(I))'.$$

Démonstration. On définit $T : \ell^1(I) \to (c_0(I))'$ par :

$$T((u_i))[(v_i)] = \sum_{i \in I} u_i v_i.$$

Bien sûr, on a l'inégalité montrant que T est bien défini et contractant :

$$|T((u_i))[(v_i)]| \leq \sum_{i \in I} |u_i| \ |v_i| \leq ||c||_\infty \sum_{i \in I} |u_i|.$$

Montrons que T est isométrique. Comme les suites à support fini sont denses dans $\ell^1(I)$ il suffit de montrer l'égalité dans ce cas, et cela vient en posant $(v_i) = 1_{\{v_i \neq 0\}} \frac{\overline{v_i}}{|v_i|} \in c_0(I)$ si (u_i) à support fini de $T((u_i))(v_i) = ||(u_i)||_{\ell^1}$. Donc comme $||(v_i)||_{c_0} \leq 1$ on a l'inégalité manquante :

$$||T((u_i))||_{(c_0)'} \geq ||(u_i)||_{\ell^1}.$$

Montrons que T est surjectif. Soit $f \in (c_0(I))'$ et e_i la suite valant 1 en i et 0 ailleurs. Soit $u_i = f(e_i)$, montrons que $(u_i) \in \ell^1(\mathbb{N})$. Or par l'isométrie

$$||(u_i 1_{i\in F})||_{\ell^1} \leq ||T((u_i 1_{i\in F}))||_{(c_0)'} = ||T((u_i)) \circ v_F||_{(c_0)'} = ||f \circ v_F||_{(c_0)'} \leq ||f||_{(c_0)'}$$

car $v_F((x_i)) = (1_{i\in F} x_i)$ est une contraction sur c_0 pour F fini (et par le calcul à support fini qui suit qui implique $f \circ v_F = T((u_i)) \circ v_F$). Donc pour tout F fini :

$$\sum_{i\in F} |u_i| \leq ||f||_{(c_0)'}$$

ce qui donne la sommabilité $u \in \ell^1(I)$.

Montrons enfin que $f = T((u_i))$.

En effet, si v est à support fini, $f(v) = T((u_i))(v)$ par linéarité mais comme les deux côtés sont continus en v et que (par définition) les suites à support fini sont denses dans $c_0(I)$, on obtient $f = T((u_i))$.

□

1.2 Bidual, Complété

Le dual du dual $E'' = (E')'$ est appelé **bidual de** E.

Définition 35. L'application $J : E \to E''$ qui envoie $J(x)(f) = f(x)$ pour $f \in E'$ est appelée *injection canonique* de E dans E''.

Proposition 76. *L'injection canonique $J : E \to E''$ est une isométrie (c'est pour cela que c'est une injection).*

Démonstration. En appliquant la définition de la norme du dual puis la conséquence de Hahn-Banach (proposition 47), on obtient :

$$||J(x)||_{E''} = \sup_{||f||_{E'}\leq 1} |J(x)(f)| = \sup_{||f||_{E'}\leq 1} |f(x)| = ||x||_E.$$

□

On donne un exemple :

Exemple 29. En combinant le résultat du chapitre 0 avec la section précédente :

$$(c_0(I))'' \simeq (\ell^1(I))' \simeq \ell^\infty(I).$$

Définition 36. L'adhérence $\widehat{E} := \overline{J(E)}^{E''}$ E dans E'' est appelée **complété de** E.

Comme c'est un espace fermé d'un espace complet, c'est un espace de Banach muni d'une injection $i : E \to \widehat{E}$ (qui est id si E est déjà n espace de Banach). Il est caractérisé par la propriété universelle suivante :

Proposition 77. *Soit F un espace de Banach et $u : E \to F$ une application linéaire continue, il existe une unique extension $\widehat{u} : \widehat{E} \to F$ telle que $\hat{u} \circ i = u$. De plus, on a $|||\hat{u}||| = |||u|||$.*

Démonstration. pour l'existence on considère $(u^t)^t : E'' \to F''$ et on regarde sa restriction $\widehat{u}$ à $\widehat{E}$. Sur E, $\widehat{u}$ coincide avec u donc est à valeur dans F. Par densité de E, l existe une suite $u_n \to u \in \widehat{E}$ et donc $\widehat{u}(\widehat{E}) \subset \widehat{F}$. Or comme F est complet il est fermé dans son bidual donc $\widehat{F} = F$. Cela donne l'existence. L'unicité vient de la densité de E dans $\widehat{E}$. Par la construction on a $|||\hat{u}||| \leq |||u|||$. L'autre inégalité vient par densité. □

2 Théorème de Banach-Steinhaus

On rappelle le lemme de Baire vu en L3 :

Lemme 78 (lemme de Baire)**.** *Soit X un espace métrique complet. Soit F_n une suite de fermés d'intérieur vide $Int(F_n) = \emptyset$. Alors*

$$Int(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \emptyset.$$

Une union dénombrable de fermés n'est pas forcément un fermé, on appelle ce type d'ensemble des ensembles F_σ ils sont stables par intersections et unions finies. Leur complémentaire, intersections dénombrables d'ouvert sont des ensembles dit G_δ.

Démonstration. Soit $O_n = F_n^c$ est un ouvert dense. Mq $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est dense. On peut supposer O_n décroissant. Soit U un ouvert non vide. Montrons que $G \cap U \neq \emptyset$. (Cela conclut car en prenant $U = B(x, \epsilon)$ on obtient l'existence de $y \in G$ avec $d(x, y) < \epsilon$).

On prend x_0 avec la boule ouverte $\overline{B(x_0, r_0)} \subset U$, $r_0 > 0$ par densité de O_1 il existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et comme il est ouvert, il existe $0 < r_1 < r_0/2$ avec $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1$. Par récurrence, on obtient x_n, r_n avec

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n, \quad 0 < r_n < r_0/2^n.$$

Or $d(x_n, x_{n-1}) < r_0/2^n$, donc pour $q > p$, $d(x_p, x_q) < r_0 \sum_{n=p+1}^{\infty} 1/2^n \to_{p\to\infty} 0$ donc x_n est de Cauchy, donc par complétude $x_n \to l$. Et par fermeture $l \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset O_n$ (car la suite est dans cette boule à partir d'un certain rang). Ceci pour tout n donc $l \in U \cap G$.

□

Le théorème suivant permet de vérifier la bornitude d'une famille d'applications linéaires ponctuellement. Ces conséquences donneront une façon de vérifier la bornitude par dualité dans les espaces de Banach. Contrairement à la convergence, qui évaluée par dualité donne une notion différente, la convergence faible, il n'y a donc qu'une seule forme de bornitude dans les espaces de Banach. On appelle ce résultat (en tradition anglosaxone) "principle of uniform boundedness".

Théorème 79. *Soient E, F des e.v.n avec E espace de Banach. Soient $T_i \in L(E, F)$ donnant une famille $(T_i)_{i\in I}$. On suppose que pour tout $x \in E$*

$$\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < \infty$$

alors on a

$$\sup_{i\in I} |||T_i||| = \sup_{i\in I ||x||_E \leq 1} ||T_i(x)|| < \infty$$

Démonstration. Soit $F_n = \{x \in E, \forall i \in I ||T_i(x)|| \leq n\}$, c'est un fermé comme intersection de fermé (vu $||T_i(.)||$ continue). L'hypothèse dit we $\cup_{n\in \mathbb{N}} F_n = E$ qui n'est pas d'intérieur non vide. Par le lemme de Baire, $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$ donc il existe $x, r > 0$ $B(x, r) \subset F_{n_0}$. Donc pour $y \in B(0, 1)$ et tout i :

$$||rT_i(y)|| \leq ||T_i(x)|| + ||T_i(x + ry)|| \leq ||T_i(x)|| + n_0$$

donc pour tout i :

$$|||T_i|||| \leq \frac{1}{r} \left(\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| + n_0 \right).$$

□

Corollaire 80. *1. Si G e.v.n. et $B \subset G$ est faiblement borné, au sens où pour tout $f \in G'$, $f(B)$ est borné dans $\mathbb{K}$, alors B est borné.*

2. Si G espace de Banach et $B \subset G'$ est préfaiblement borné, au sens où pour tout $f \in E$, $J(f)(B)$ est borné dans $\mathbb{K}$, alors B est borné.

3. En particulier, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\sigma(E,E')$ ou $\sigma(E',E)$ alors (x_n) est bornée.

Ce dernier résultat n'a pas d'analogue pour les suites généralisées d'où l'importance des suites généralisées bornées avec lesquelles on peut raisonner comme avec les suites.

Démonstration. (1) On applique Banach-Steinhauss à $E = G'$ complet, $F = \mathbb{K}, I = B$ et $Tb = J(b)$ $J(B) \subset L(G', \mathbb{K}) = G''$, on obtient $J(B)$ borné dans G'' donc B borné dans G vu J isométrique.

(2)Ici $E = G$,$I = B$ et $F = \mathbb{K}$, $T_b = b$ et la conclusion est directe. (3) Dans les deux cas pour f application linéaire faiblement ou préfaiblement continue, $f(x_n)$ converge donc, comme c'est une suite, elle est bornée, et donc l'hypothèse de (1) ou (2) est vérifiée pour $B = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. □

3 Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

On va utiliser le lemme déjà vu au TD 1 (dans la preuve du lemme de Tietze-Urysohn de prolongement des fonctions continues).

Lemme 81. *Soient E, F des espaces de Banach, $T \in L(E,F)$ tels que $\exists \alpha \in]0,1[, C \in]0,\infty[$ avec*

$$\overline{B_F(0,1)} \subset T(\overline{B_E(0,C)}) + \overline{B_F(0,\alpha)}.$$

Alors, $\overline{B_F(0,1)} \subset T(\overline{B_E(0,\frac{C}{1-\alpha}}))$

Démonstration. Soit donc $g \in F$, $||g|| \leq 1$ Déduisons qu'il existe $F \in E$, $||F||_E \leq \frac{C}{1-\alpha}$ tel que $T(F) = g$. On construit une suite f_n par récurrence à partir du résultat précédent telle que $f_n = F_0 + ... + F_n$

$$\sum_{k=0}^{n} ||F_k||_\infty \leq C(1 + ... + \alpha^n)$$

et

$$|T(f_n) - g||_\infty \leq \alpha^{n+1}.$$

On prend $f_0 = F_0$ donné par hypothèse car il existe $||f_0|| \leq C$ tel que $||T(f_0) - g|| \leq \alpha$. On prend $F_n/||T(f_{n-1}) - g||_F$ donné de même à partir de $g_n = -[T(f_{n-1}) - g]/||T(f_{n-1}) - g||_E \in \overline{B_F(0,1)}$ (si le dénominateur est 0 on s'arrête et on prend la suite constante).

Donc on a les deux inégalités

$$||F_n||_E \leq C||T(f_{n-1}) - g||_F \leq C\alpha^n$$

et

$$||T(F_n) + T(f_{n-1}) - g||_F \leq \alpha||T(f_{n-1}) - g||_\infty \leq \alpha^{n+1}$$

La deuxième inégalité donne $||T(f_n) - g||_\infty \leq \alpha^{n+1}$. La première inégalité suit par l'hypothèse de récurrence. $\sum F_n$ est donc absolument convergente dans E par complétude, donc soit $f = \sum_{n=0}^\infty F_n = \lim f_n$. En passant à la limite on obtient

$$||f||_E \leq C\frac{1}{1-\alpha}$$

et $||T(f) - g||_F = 0$.

□

Théorème 82 (de l'application ouverte)**.** *Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue SURJECTIVE, alors T est ouverte (elle envoie un ouvert sur un ouvert). Autrement dit,*

$$\exists c > 0, B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

En particulier, si T est bijective, T^{-1} est continue.

Démonstration. Si $F_n = n\overline{T(B_E(0, 1/2))} = \overline{T(B_E(0, n/2))}$ ce sont des fermés dont l'union couvre F (car T surjective), donc par le lemme de Baire comme F complet, $Int(F_n) \neq \emptyset$ pour un n donc par homogénéité, $Int(\overline{T(B_E(0, 1/2))}) \neq \emptyset$. DOnc pour $c > 0$ $B(x, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1/2))}$, donc $-x \in \overline{T(B_E(0, 1/2))}$ donc

$$B(0, 2c) = -x + B(x, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1/2))} + \overline{T(B_E(0, 1/2))} \subset 2\overline{T(B_E(0, 1/2))} = \overline{T(B_E(0, 1))}$$

la dernière inclusion par convexité de $\overline{T(B_E(0, 1/2))}$.

Donc en prenant $C = 1/2c > 1$, $\overline{B(0, 1)} \subset \overline{T(B_E(0, C))}$, on peut prendre tout $\alpha > 0$ dans le lemme précédent donc $\alpha = 1/3$ d'où l'inclusion qui conclut en multipliant par $1/c$:

$$B_F(0, 1) \subset \overline{B_F(0, 1)} \subset T(\overline{B_E(0, \frac{1}{2c(1 - 1/3)})}) = T(\overline{B_E(0, \frac{3}{4c})}) \subset T(B_E(0, \frac{1}{c})).$$

□

Le résultat suivant est essentiellement équivalent :

Théorème 83 (du graphe fermé)**.** *Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire telle que le graphe $G(T) = \{(x, T(x)), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.*

Démonstration. $G(T)$ est un sev fermé de $E \oplus^\infty F$ donc complet, $(Id, T) : E \to E \oplus^\infty F = E \times F$ donne une bijection $(Id, T) : E \to G(T)$ d'inverse la première projection qui est continue donc elle est continue par le théorème de l'application ouverte. Donc $\max(||x||_E, ||T(x)||_F) \leq C||x||_E$ donc T continue. □

Corollaire 84. *Soit $F \subset E$ un sous-espace fermé d'un espace de Banach. Il y a équivalence entre :*

1. *Il existe un P **continue** de $P : E \to E$ avec $P^2 = P$ et $Im(P) = F$ (une projection continue sur F).*
2. *Il existe G **fermé** tel que $E = F \oplus G$.*

Alors on a l'isomorphisme $E/F \simeq G$.

Démonstration. Si on a (1) $E = Im(P) \oplus Ker(P)$ comme pour toute projection et $G = Ker(P)$ est fermé si P continue. Si on suppose (2), On prend $P : E \to E$ la projection associée à la somme directe $P(x, y) = (x, 0)$, il suffit de voir que P a un graphe fermé. Si $(x_n, y_n) \in E$ et $(x_n, y_n) \to (x, y)$ et $P((x_n, y_n)) = (x_n, 0) \to (a, b)$ alors $a = x$, $b = 0$. Comme G, F fermés, $x \in F, y \in G$ donc (x, y) est la décomposition de la limite selon $F \oplus G$ donc $P(x, y) = (x, 0)$ et le graphe est donc bien fermé.

$u = 1 - P : E \to G$ s'annule sur F, est continue donc on a l'application quotient $u_F : E/F \to G$. E/F et G sont des espaces de Banach et u_F bijective par définition donc son inverse est continu (par le théorème de l'application ouverte). □

Exemple 30. On verra en TD que $c_0 \subset \ell^\infty$ n'a pas de supplémentaire fermé. (à partir de l'exercie du recueil d'exercice de Chambert-Loir et Fermigier : Analyse 3)

Remarque 17. Un théorème de [Lindenstrauss-Tzafiri] dit que si tout sous-espace fermé d'un Banach E admet un supplémentaire fermé, alors il existe une norme équivalente hilbertienne.

4 Topologies faibles [preuves facultatives]

Ce chapitre va étudier les propriétés de topologies plus faibles (ayant moins d'ouverts, plus de suites convergentes et donc plus de compacts) que la topologie de la norme.

Cette étude est motivée par le résultat suivant qui indique qu'il y a très peu de compacts pour la norme dans un e.v.n. de dimension infinie.

Théorème 85. *Soit E un e.v.n., alors $K \subset E$ est compact (pour la topologie de la norme) si et seulement si K est fermé et qu'il existe une suite $||x_n|| \to 0$ avec $K \subset \overline{Co}(A)$ avec $A = \{x_n, n \in I\!N\} \cup \{0\}$.*

Idée de preuve. Par la proposition 54, comme A est compact (une suite convergente d'une suite convergente est soit stationnaire soit une sous-suite) K est compact comme fermé d'un compact. Réciproquement, on construit des parties fines avec $R_j \subset 2^{-j-1}B(0,1)$ et $2K \subset R_1 + R_2/2 + ... + R_j/2^{j-1} + B_F(0,1)/4^j$, R_1 existe par précompacité de K. $2^j(2K - R_1 - R_2/2 - ... - R_j/2^{j-1}) \cap B_F(0,1/2^j)$ est un compact de $B_F(0,1/2^j)$, on trouve donc R_{j+1} dans cette boule telle que ce compact est recouvert par $R_{j+1} + B(0,1/4.2^j)$. La récurrence se conclut facilement. On énumère ensuite Les éléments de R_j en une suite qui tend donc vers 0 d'après la condition de norme. Tout élément de $2K$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{\infty} r_j/2^{j-1}$ en divisant par 2 on obtient une combinaison convexe (infinie) (limite de combinaison convexe fini où le reste de la série est remplacée par 0). □

Les topologies faibles $\sigma(E,\Phi)$ vont être les topologies les plus faibles rendant continues une famille Φ d'applications linéaires continues sur E.

Définition 37. Soit E un e.v.n. et $\Phi \subset E'$ un sous-espace vectoriel, la topologie $\sigma(E,\Phi)$ est la topologie dont les ouverts sont les unions des ensembles $\cap_{i\in I} V(f_i, x_i, \epsilon_i)$ pour I fini, $f_i \in \Phi, x_i \in E, \epsilon_i > 0$ et

$$V(f_i, x_i, \epsilon_i) := \{x \in E : |f_i(x - x_i))| < \epsilon_i\}.$$

Il est facile de voir que cette famille est bien stable par union quelconque et intersection finie et forme donc une topologie.

Proposition 86. *0. Si $x \in E$, et U ouvert pour $\sigma(E,\Phi)$ $x \in U$, il existe $f_1, ..., f_n \in E', \epsilon > 0$ tel que $\cap_{i=1}^n V(f_i, x, \epsilon) \subset U$.*

1. *$x_n \to x$ pour $\sigma(E,\Phi)$ ssi $\forall f \in \Phi, f(x_n) \to f(x)$*
2. *$g : X \to E$ est continue pour la topologie de X et $\sigma(E,\Phi)$ ssi pour tout $f \in \Phi, f \circ g$ est continue. En particulier $(x,y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues de $E^2 \to E$, et de $I\!K \times E \to E$ si E munie de $\sigma(E,\Phi)$.*
3. *$\sigma(E,\Phi)$ est la topologie la plus faible rendant continue les $f \in \Phi$.*

Démonstration. (0) On prend $x \in \cap_{i=1}^n V(f_i, x_i, \epsilon_i) \subset U$ on pose $\epsilon = \min_{i=1}^n(\epsilon_i - |f_i(x - x_i)|) > 0$, car $x \in \cap_{i=1}^n V(f_i, x_i, \epsilon_i)$.

(1) $x_n \to x$ ssi pour tout $f \in \Phi, \epsilon > 0$ $V(f, x, \epsilon)$, il existe N tel que pour $n \geq N$ $x_n \in V(f, x, \epsilon)$. L'énoncé pour tout ϵ dit $f(x_n) \to f(x)$. Et donc $x_n \to x$ pour $\sigma(E,\Phi)$ ssi cela arrive pour tout $f \in \Phi$.

(2) Si g est continue, les $f \circ g$ le sont par compositions. Réciproquement, il suffit que pour tout $f \in \Phi, \epsilon > 0$ $g^{-1}(V(f, x, \epsilon))$ soit ouvert (en prenant intersection finie et union, on obtient $g^{-1}(U)$ pour tout ouvert. Cela dit $(f \circ g)^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ ouvert si $f \circ g$ continue.

(3)Le fait que $\sigma(E,\Phi)$ est une topologie rendant les $f \in \Phi$ continues est évident. Réciproquement, une topologie rendant les f continues contient pour ouvert $f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) = V(f, x, \epsilon)$ et donc contient tous les ouverts de $\sigma(E,\Phi)$ et est donc plus faible. □

On est intéressé à deux cas particulier :

Définition 38. Soit E un e.v.n, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est le cas particulier $\Phi = E'$ et on note la convergence $x_n \rightharpoonup x$.

La topologie faible-$*$ (faible étoile ou préfaible) $\sigma(E', E)$ sur E' est le cas particulier $\Phi = J(E) \subset E''$ l'image canonique de E dans le bidual. On note la convergence $x_n \rightharpoonup^* x$.

On commence par montrer les 2 théorèmes fondamentaux rendant utiles ces topologies.

4.1 Propriétés générales des topologies faibles

Proposition 87. *1. les topologies faibles $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$ sont séparées (de Hausdorff). (en particulier une suite convergente a une unique limite)*

2. Si une suite x_n converge vers x pour $\sigma(E, E')$ ou $\sigma(E', E)$ alors x_n est bornée et $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.

3. Si ($||f_n - f|| \to 0$ et $x_n \rightharpoonup x$) ou ($f_n \rightharpoonup^* f$ et $||x_n - x|| \to 0$) alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

4. Si une application LINEAIRE $T : E \to F$ est continue, alors T est continue pour $\sigma(E, E') \to \sigma(F, F')$.

Il n'y a pas de résultat analogue à (4) pour la topologie faible-*. En fait une forme linéaire continue sur E' pour $\sigma(E', E)$ vient de E qui est en général plus petit que E''.

Démonstration. (1) Pour $x_1 \neq x_2$, on a deux convexes compacts $\{x_i\}$ on les séparent par Hahn-Banach par $f \in E'$ de sorte que $x_1 \in f^{-1}(]-\infty, \alpha[$, et $x_2 \in f^{-1}(]\alpha, \infty[)$, qui sont deux ouverts disjoints de la topologies faibles.

Pour la topologie faible-$*$, si $f_1 \neq f_2$ il existe $x \in E$ avec $f_1(x) \neq f_2(x)$ et donc disons $f_1(x) < \alpha < f_2(x)$ ce qui ramène à la situation précédente.

(2) La bornitude est une conséquence du théorème de Banach-Steinhauss au chapitre 5 (corollaire 80 (3)). Dans le cas de la topologie faible le résultat sur la limite vient aussi de la semi-continuité inférieure faible de $||.||$ (qui vient du théorème 88). Sinon, on prend f avec $||f|| \leq 1$ avec

$$||x|| \leq |f(x)| + \epsilon = \lim |f(x_n)| + \epsilon \leq ||f|| \liminf ||x_n|| + \epsilon$$

la dernière relation en passant à la $\liminf$ l'inégalité $|f(x_n)| \leq ||f||\, ||x_n||$. Comme $\epsilon \to 0$ est possible, on a le résultat.

(3) cela se déduit facilement de (2) car, par exemple pour le premier

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq ||f_n - f|| \sup ||x_n|| + |f(x_n - x)| \to 0,$$

car la convergence faible implique la bornitude.

(4) SOit $f \in F'$, il suffit de vérifier $f \circ T$ est continue pour $\sigma(E, E')$ mais c'est le cas puisque c'est une application linéaire continue. □

4.2 Convexes faiblement fermés

Le premier est encore une conséquence de Hahn-Banach :

Théorème 88. *Soit $C \subset E$ un convexe d'un e.v.n. alors E est fermé pour la topologie de la norme ssi il est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

En particulier, les fonctions convexes s.c.i. coïncident pour la topologie de la norme et la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Démonstration. Un ensemble faiblement fermé est toujours normiquement fermé. Réciproquement, si C convexe normiquement fermé, on montre que C^c est faiblement ouvert. On prend $x \in C^c$ et on sépare le compact x et C par Hahn-Banach. Donc on a $f \in E'$ avec $f(x) > \alpha > f(c), c \in C$. Donc $si y \in V(x, f, |\alpha - f(x)|/2)$

$$f(y) = f(x) - (f(x-y)) > f(x) - |\alpha - f(x)|/2 \geq \alpha + |\alpha - f(x)|/2$$

donc $V(x, f, |\alpha - f(x)|/2 \subset C^c$ qui contient donc un voisinage faible de x et est donc ouvert. □

Théorème 89 (de Mazur). *Si $x_n \rightharpoonup x$, il existe $y_n \in Conv(x_n, n \in I\!N)$ telle que $||y_n - x|| \to 0$.*

Démonstration. Soit $A = Conv(x_n, n \in \mathbb{N})$. Comme x est dans l'adhérence faible de A, il suffit de montrer que cette adhérence est inclus dans l'adhérence normique : $\overline{A}^{\sigma(E,E')} \subset \overline{A}$. Or $A \subset \overline{A}$ et on a, vu que $\overline{A}$ est convexe et fermé, donc par le théorème précédent, faiblement fermé, donc par caractérisation de l'adhérence, contient l'adhérence faible. □

4.3 Compacité faible-$*$ des boules

Le second théorème est la source principale de compacts en dimension infinie.

Théorème 90 (Banach-Alaoglu). *La boule unité fermée $B_{E'} = \{f \in E', ||f|| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible-$*$.*

Démonstration. On pose $B = B_E = \{x \in E, ||x|| \leq 1\}$. A la preuve du théorème 34, on a décrit $i : E' = L(E, I\!K) \to C_b(B_E, I\!K)$ la restriction à la boule et l'image

$$i(E') = \{u \in C_b(B, I\!K) : \forall \lambda, \mu \in K |\lambda| + |\mu| \leq 1, \forall x, y \in B, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)\}.$$

On en déduit que $i(B_{E'}) = \{u \in C_b(B, I\!K) : ||u|| \leq 1, \forall \lambda, \mu \in K |\lambda| + |\mu| \leq 1, \forall x, y \in B, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)\}$.

On a donc $i : B_{E'} \to i(B_{E'}) \subset \{z \in I\!K : |z| \leq 1\}^B$. Or, par le théorème de Tychonov, un produit d'espace compact est compact donc c'est un espace compact. Montrons que si $B_{E'}$ est muni de la topologie faible-$*$, on obtient un homeomorphisme sur son image. La topologie produit est la topologie la plus faible rendant les évaluations continues donc i est continue car la composée de i avec ces évaluations est continue. i est injective. Enfin, $i^{-1} : i(B_{E'}) \to E'$ est continue car en composant avec les évaluations en $x \in E$, on peut écrire $i^{-1}(y)[x] = ||x|| i^{-1}(y)[z]$ avec $z \in B_E$, ce qui donne donc la continuité pour la topologie produit car les évaluations sur B_E sont par définition continues. Or par la formule comme $u \mapsto u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) + \mu u(y)$ intervenant dans la description de $i(B_{E'})$ sont continues, on déduit que $i(B_{E'}) \subset [-1, 1]^B$ est un sous-ensemble fermé d'un compact, donc compact. □

4.4 Applications à un problème de minimisation

Le résultat suivant va exploiter simultanément les propriétés de la topologie faible $\sigma(E', E'')$ et de la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ quand elles coincident sur E' c'est à dire quand $J(E) = E''$. On dit alors que E est **réflexif**. Ces espaces vont être étudiés en détail dans les chapitres suivants.

Théorème 91. *Soient E un espace de Banach réflexif et $C \subset E$ un convexe fermé non-vide et $f : C \to]-\infty, \infty]$ une fonction convexe, s.c.i. avec $f \neq +\infty$ telle que*

$$\lim_{x \in C, ||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$$

(Il n'y a donc pas de condition supplémentaire si C est borné). Alors f atteint son minimum : Il existe $c \in C$ tel que

$$f(x) = \inf_{c \in C} f(c).$$

A ce stade, le résultat est un résultat d'existence abstrait ne donnant pas de construction pour c, après une étude plus systématique des espaces réflexifs au chapitre 5, on pourra le préciser.

Démonstration. Il existe $a \in C$ avec $\lambda = f(a) < \infty$ donc $A = \{x \in C, f(a) \leq \lambda\}$ est convexe non-vide et fermé. (car f convexe s.c.i.). Il est donc aussi faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$, donc par réflexivité pour $\sigma(E'', E') = \sigma(E, E')$. Il est borné par l'hypothèse supplémentaire de limite à l'infini. Il est donc compact pour la topologie faible-* $\sigma(E'', E')$ par Banach -Alaoglu, donc compact pour $\sigma(E, E')$. Or $epi(f)$ est convexe fermé donc faiblement fermé, donc f est faiblement s.c.i sur un compact, elle atteint donc sa borne inférieure. $\square$

4.5 Compléments [facultatifs]

Lemme de Goldstine

Lemme 92. *(de Goldstine) Soit E un espace de Banach et $J : E \to E''$ l'injection canonique. Alors $J(B_E(0,1))$ est préfaiblement dense dans la boule $B_{E''}(0,1)$ (pour la topologie $\sigma(E'', E')$).*

Démonstration. Soit V voisinage de $x \in B_{E''}(0,1)$ on doit montrer que $J(B_E(0,1)) \cap V \neq \emptyset$. Ce pour quoi on peut supposer V dans la base d'ouvert $V = \{y \in E'', |(y-x)(f_i)| < \epsilon, = 1, ..., n\}$ pour $f_1, ..., f_n \in E$. On cherche donc $X \in B_E(0,1)$ tel que

$$|f_i(X) - x(f_i)| < \epsilon.$$

Ceci revient donc à voir (si pour tout ϵ on veut trouver X) que $z = (x(f_1), ..., x(f_n)) \in \overline{(f_1, ...f_n)(B_E(0,1))}$.

Par l'absurde, sinon, on peut séparer $z \in \mathbb{R}^n$ convexe compacte et $\overline{(f_1, ...f_n)(B_E(0,1))}$ convexe fermé (disjoint par l'hypothèse que l'on veut contredire). Donc, par séparation de Hahn-Banach, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ avec :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(y) < c < \sum_{i=1}^n \lambda_i x(f_i), y \in B_E(0,1)$$

En passant au sup on obtient :

$$||\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i||_{E'} \leq c < \sum_{i=1}^n \lambda_i x(f_i)$$

ce qui contredit l'inégalité élémentaire : $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i x(f_i)\right| = \left|x(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i)\right| \leq ||x|| \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right\| < \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right\|.$$

$\square$

Généralités sur les formes linéaires

On laisse le lemme suivant en exercice :

Lemme 93. *Si $N \subset E'$ est un s.e.v de dimension finie alors $({}^{\perp}N)^{\perp} = N$.*

Proposition 94. *Une application linéaire $f : (E, \sigma(E, \Phi)) \to I\!K$ est continue ssi $f \in Vect(\Phi) = \Phi$.*

Démonstration. Si f est continue il existe un voisinage de 0 de la forme $\cap_{i \in I} V(f_i, 0, \epsilon_i)$ sur lequel f est bornée par 1 donc (comme l'intersection est la boule unité pour la seminorme de la borne de droite)

$$|f(x)| \leq \max_{i \in I} \frac{|f_i(x)|}{\epsilon_i}.$$

En particulier, si $x \in {}^{\perp}(\{f_1, ..., f_n\})$ on a $f(x) = 0$ donc

$$f \in ({}^{\perp}(Vect\{f_1, ..., f_n\}))^{\perp} = Vect(f_1, ...f_n) \subset \Phi,$$

par le lemme précédent et comme Φ est un sous-espace vectoriel. □

Lemme 95. *Si $F \subset E, N \subset E'$, alors $F^{\perp}$ est fermé pour $\sigma(E', E)$ et $({}^{\perp}N)^{\perp}$ est l'adhérence faible-$*$ de N (donc pour $\sigma(E', E)$).*

En particulier, si $T : E \to F$ linéaire continue $Ker(T^t)$ est toujours un fermé faible- de F'. T est injective ssi $Im(T^t)$ est faible-*-dense dans E'.*

Démonstration. La fermeture faible étoile est évidente donc le fait que l'adhérence faible-* de N est inclus dans $({}^{\perp}N)^{\perp}$.

Si f n'est pas dans l'adhérence faible-* de N. Vérifions qu'il existe $\phi : N' \to \mathbb{K}$ faible-* continue telle que $A = \overline{N}^{\sigma(E',E)} \subset Ker(\phi)$ et $\phi(f) = 1$ (On refait juste la preuve du théorème de séparation de Hahn-Banah pour la topologie faible-* à partir du théorème de prolongement).

Comme $A = \overline{N}^{\sigma(E',E)}$ est fermé, il existe un voisinage $U = \cap_{i \in I} V(J(x_i), 0, 1)$ de 0 pour la topologie faible-* tel que $f + U$ ne rencontre pas A. Donc $f \notin B = A - U = A + U$ et B est un convexe ouvert Comme dans la preuve du premier cas du théorème de séparation de Hahn-Banach. La forme linéaire $g(tf) = t$ sur $\mathbb{R}f$ est dominée par μ_B (car B est faiblement ouvert donc ouvert et convexe donc l'argument s'applique), on l'étend en une forme linéaire $\phi : N' \to K$ (donc telle que $\phi(f) = 1$) et $\phi(x) \leq \mu_B(x)$ donc pour tout $b \in A \subset B$, comme A est un sev, $\lambda\phi(b) < 1$ donc $\phi(b) = 0$ et on a donc $A \subset Ker(\phi)$.

Enfin $U \subset B$ donc

$$\mu_B(f) \leq \mu_U(f) = \mu_{\overline{U}}(f) \leq \max_{i \in I} |f(x_i)|.$$

En particulier ϕ est continue pour la topologie faible-* et par la proposition précédente $\phi = J(x) \in J(E)$ avec $x \in {}^{\perp}N$ donc $f \notin ({}^{\perp}N)^{\perp}$ CQFD

□

Théorème de Krein-Smulian [Admis]

Comme la topologie préfaible n'est pas forcément métrisable (cf chapitre 5 séparabilité pour voir quand elle l'est), on ne peut pas raisonner avec des suites pour établir des propriétés de continuités, fermeture etc. La grande différence entre suites et suites généralisées est que ces dernières peuvent être (préfaiblement) convergentes sans être bornées. On a alors besoin d'un résultat ramenant à des bornés pour avoir des suites généralisées bornées, avec lesquelles on peut raisonner (presque) comme avec les suites. Le théorème suivant admis (cf le livre 'Functional Analysis" de Conway Th 12.1 p 159) est alors très utile :

Théorème 96 (de Krein-Smulian)**.** *Soit E un espace de Banach et $A \subset E'$ un convexe. Si*

$$A \cap \{x \in E', ||x|| \leq n\}$$

est préfaiblement fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors A est préfaiblement fermé (i.e. fermé pour $\sigma(E', E)$).

5 Séparabilité

Définition 39. On dit qu'un espace topologique est **séparable** si il existe un sous-ensemble (fini ou) dénombrable et dense.

Lemme 97. *Un sous-ensemble F d'un espace métrique séparable est séparable.*

Démonstration. Soit u_n suite dénombrable dense. Soit $a_{m,n} \in B(u_n, 1/n) \cap F$ si cet ensemble est non-vide. La famille $\{a_{m,n}, m, n \in \mathbb{N}\}$ est finie ou dénombrable et dense car si $x \in F$ il existe $d(u_m, x) < 1/2n$ donc $a_{m,2n}$ existe car $B(u_m, 1/2n) \cap F$ est non vide et par inégalité triangulaire $d(u_m, a_{m,2n}) < 1/n$. □

Cette partie a trois résultatss important, la relation entre séparabilité et metrisabilité des topologies faibles, la relation entre séparabilité du dual et d'un espace, et l'écriture d'un espace séparable comme quotient de $\ell^1(\mathbb{N})$ (qui est moins souvent utilisé.)

Théorème 98. *Si E est un espace vectoriel normé et E' est séparable alors E est séparable.*

Exemple 31. La réciproque est fausse $\ell^1(\mathbb{N})$ est séparable mais $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ne l'est pas (exo TD).

Démonstration. Soit f_n dense dans E' et par définition de la norme, on trouve $x_n \in E$, $||x_n|| = 1$ avec $f_n(x_n) \geq ||f_n||/2$ On pose Λ_n le $\mathbb{Q}$ e.v. engendré par $x_1, ..., x_n$ il est donc dénombrable, comme $\Lambda = \cup_{n\geq 1}\Lambda_n$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, Λ est dense dans $F = Vect(x_n, n \geq 1)$. Or si $f \in F^\perp, \epsilon > 0$, on a n avec $||f - f_n|| \leq \epsilon$ donc $||f_n||/2 \leq f_n(x_n) = (f_n - f)(x_n) \leq \epsilon$ donc $||f|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| \leq 3\epsilon$ donc $F^\perp = \{0\}$ donc F dense dans E (conséquence de Hahn-Banach), donc aussi Λ. □

Théorème 99 (facultatif)**.** *Si E est un espace de Banach séparable et $(x_n)_{n\geq 0}$ dense dans la boule unité, alors $T : (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n\geq 0} u_n x_n \in E$ est surjective et donne un isomorphisme (pas forcément isométrique) :*

$$E \simeq \ell^1(\mathbb{N})/Ker(T).$$

On pourrait aussi trouver un quotient isométrique du même type.

Démonstration. $\sum ||u_n x_n|| \leq \sum |u_n| = ||(u_n)||_1 < \infty$ donc la série définissant $T((u_n))$ est absolument convergente donc converge dans E par complétude et $||T((u_n))|| \leq ||(u_n)||_1$ est une contraction (linéaire est évident par linéarité des sommes de séries convergentes). Or $B_E(0,1) \subset \overline{\{T(e_n)n \in \mathbb{N}\} + B(0, 1/2)} \subset \overline{T(B(0,1)) + B(0, 1/2)}$ par densité des x_n donc par le lemme 81, T est surjective. Donc l'application quotient $\tilde{T} : \ell^1(\mathbb{N})/Ker(T) \to E$ est continue, injective par définition et surjective donc par le théorème de l'application ouverte $\tilde{T}^{-1}$ est continue donc c'est l'isomorphisme souhaité. □

On va déduire la métrisabilité pour la topologie faible des duaux d'espaces séparables du cas de $\ell^\infty(\mathbb{N})$:

Lemme 100. *Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N}) \subset (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ positive ($\forall n, u_n > 0$), $|(u_n)| = (|u_n|)$ alors $d(f, g) = u(|f - g|)$ est une distance sur la boule unité B de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui a pour topologie associée la topologie préfaible $\sigma(\ell^\infty(\mathbb{N}), \ell^1(\mathbb{N}))$ qui est donc métrisable sur B.*

Démonstration. comme $u_i > 0$ $d(f,g) = 0$ implique $|f_i - g_i| = 0$ pour tout i donc $f = g$. L'inégalité triangulaire et la symétrie sont évidentes donc d est une distance (sur tout $\ell^\infty(\mathbb{N})$). La topologie (sur la boule) ne dépend pas de la suite u_i car pour une suite $f^{(n)} \to_d f$ implique pour tout i $|f_i^{(n)} - f_i| \leq d(f^{(n)}, f)/u_i \to 0$ et par sommabilité de u_i cela implique en prenant $\sum_{i \geq N} u_i \leq \epsilon/4$, et n grand pour avoir $\sum_{i \leq N} u_i |f_i^{(n)} - f_i| \leq \epsilon/2$ on a

$$(*) \quad d(f^{(n)}, g) \leq \sum_{i \leq N} u_i |f_i^{(n)} - f_i| + \epsilon/4(||f^{(n)}|| + ||f||) \leq \epsilon$$

(on utilise ici que la suite est dans la boule unité). La notion de convergence de suite ne dépend donc pas du choix de u donc les métriques donnent la même topologie. Or pour $v \in \ell^1(\mathbb{N})$, $|v(f) - v(g)| \leq |v|(|f-g|) \leq (u + |v|)(|f-g|)$ donc la topologie sur la boule est plus forte que la topologie faible (puisqu'elle rend continue tous les v). Reste à voir que la topologie faible est aussi plus forte soit $id : B \to (B, d)$ continue. C'est ce que donne la première inégalité de $(*)$ car on peut prendre un voisinage de la topologie faible telle que $\sum_{i \leq N} u_i |f_i^{(n)} - f_i| \leq \epsilon/2$ donc inclus dans $B_d(0, \epsilon)$ qui est donc un ouvert préfaible (en translatant autour de chaque point comme en 0 puisque la métrique est invariante par translation). □

Théorème 101. *Soit E un espace de Banach.*

1. *E est séparable si et seulement si $B_{E'}(0,1)$ est métrisable pour la topologie préfaible $\sigma(E', E)$. Dans ce cas la boule unité de E' est donc séquentiellement préfaiblement compacte.*
2. *Si E' est séparable alors $B_E(0,1)$ est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

La réciproque de (2) est vrai mais plus dure.

Démonstration. (1) On a $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to E$ du théorème précédent surjective. Sa transposée est toujours préfaiblement continue $T^t : E' \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ (cf exo du TD 4), elle est injective par la proposition 60 car $Im(T)$ dense. En fait comme T surjective, la topologie préfaible de E' est induite de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (a priori la topologie induite est plus faible, mais si $f = T(x) \in E$, $J(f) = J(x)|_{E'}$ est donc continue pour la topologie préfaible induite, et comme la topologie préfaible est la plus faible ayant cette propriété et que la topologie induite est plus faible, elles coincident). Donc comme $T^t(B_{E'}(0,1))$ est borné, et que la boule de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est métrisable, la topologie induite sur $B_{E'}(0,1)$ l'est aussi ce qui conclut.

Réciproquement, si d métrise $B_{E'}(0,1)$ on a voisinage $V_n = \{f \in B_{E'}(0,1) | f(x_n)| < \epsilon_n \forall x_n \in \Phi_n\} \subset B_d(0, 1/n)$ avec $\Phi_n \subset E$ fini. Donc $D = \cup_{n \geq 1} \Phi_n$ dénombrable et $Vect_{\mathbb{Q}}(D)$ est dense dans $Vect(D)$ qui est dense dans E car $sif \in D^\perp$, $f \in \cap V_n \subset \cap B_d(0, 1/n)$ donc $f = 0$ car d est une distance. La séquentielle compacité vient de Banach-Alaoglu et de la métrisabilité.

(2) Par (1), $B_{E''}(0,1)$ métrisable pour $\sigma(E'', E')$ et $B_E(O,1)$ est inclus par l'application canonique J avec pour topo induite $\sigma(E, E')$ qui est donc aussi métrisable en restreignant la métrique. □

Proposition 102. *Soit (Ω, μ) un espace mesuré $\sigma - fini$ sur une tribu $\mathcal{T}$* ***dénombrablement engendrée*** *c'est-à-dire $\mathcal{T} = \sigma\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ (ex la tribu borelienne d'un espace métrique séparable) Alors $L^p(\Omega, \mu)$* ***est séparable pour*** *$1 \leq p < \infty$* ***(normiquement). De plus,*** *$L^\infty(\Omega, \mu)$* ***est préfaiblement séparable.***

Démonstration. (cf exo TD) □

Exemple 32. On verra en TD que $L^\infty([0,1], Leb), \ell^\infty(\mathbb{N})$ ne sont PAS séparables pour la topologie de la norme.

6 Réflexivité

On rappelle que l'application $J : E \to E''$ qui envoie $J(x)(f) = f(x)$ pour $f \in E'$ est appelée *injection canonique* de E dans E''. C'est une isométrie (c'est pour cela que c'est une injection). $J(E) \subset E''$ est fermé si et seulement si E est un espace de Banach.

Définition 40. Un espace de Banach est dit **réflexif** si $J(E) = E''$.

On commence par montrer quelques propriétés de stabilité.

Théorème 103. *Soit E un espace de Banach. $M \subset E$ un sous espace fermé.*

1. *E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*
2. *(E est réflexif et séparable) si et seulement si (E' est réflexif et séparable).*
3. *Si E est réflexif, alors M avec la topologie induite et E/M avec la topologie quotient sont réflexifs.*

Démonstration. (1) Si $J : X \to X''$ est isométrie surjective, on a $J^t : X''' \to X'$ isométrique et il suffit de voir que J^t est l'inverse à droite de $J_{X'} : X' \to X'''$ pour voir $J_{X'}$ surjectif. Or pour $x \in X''$ $x = Jy$, $y \in X$ comme X réflexif, donc

$$(J_{X'} \circ J^t(f))(x) = x[J^t(f)] = J(y)[J^t(f)] = [J^t(f)](y) = f(J(y)) = f(x)$$

d'où $J_{X'} \circ J^t = id_{X'''}$ et la surjectivité voulue.

(1)'Si X n'est pas réflexif, $JX \neq X''$, donc il existe par séparation de Hahn-Banach, $f \in X'''$ telle que $JX \subset Ker(f)$ et $f \neq 0$. Montrons que $f \notin J_{X'}(X')$. En effet, si $y \in X'$ avec $J_{X'}(y)$ s'annulant sur JX. pour $x \in X$, on a :

$$0 = J_{X'}(y)[J(x)] = [J(x)](y) = y(x)$$

donc y s'annule sur X donc $y = 0$ dans X' donc $J_{X'}(y) = 0 \neq f$. donc $f \notin J_{X'}(X')$ et X' n'est donc pas réflexif.

(2)Si X est réflexif et séparable, $X'' = X$ est séparable, donc X' est séparable et donc par le (1) aussi réflexif. On a déja vu que X' séparable implique X séparable d'où l'équivalence.

(3)Le cas du quotient vie,t du théorème sur la dualité et du Théorème 50. Il reste le cas du sous-espace. Or la topologie $\sigma(M, M') = \sigma(M, E'/M^\perp)$ est équivalente à la topologie restreinte par $\sigma(E, E')$ comme toute les formes linéaires de E' se restreint en un élément de M' et réciproquement toute forme de M' vient par quotient (qui reformule Hahn-Banach) d'une forme de E'. Or par le théorème de Kakutani 107 ci-dessous, la boule unité de E est compacte pour $\sigma(E, E')$, son intersection avec M est aussi fermé pour cette topologie car M est fermé par le Théorème 88, donc compact comme fermé d'un compact pour $\sigma(E, E')$, donc aussi pour $\sigma(M, M')$. Par le théorème de Kakutani on déduit donc M réflexif.

□

Proposition 104. *Si E est réflexif, alors un convexe fermé borné $K \subset E'$ est faiblement compacte et séquentiellement faiblement compacte pour $\sigma(E, E')$ (c'est-à-dire, de toute suite de K on peut extraire une sous-suite faiblement convergente).*

Démonstration. Un convexe fermé est faiblement fermé (proposition 88) donc préfaiblement fermé (topologie faible et préfaible coïncident par réflexivité), comme il est borné, c'est un préfaiblement fermé de la boule préfaiblement compact (Banach-Alaoglu) donc il est préfaiblement compact. Si on prend une suite x_n, $F = \overline{Vect(x_n, n \in \mathbb{N})}$ est séparable et réflexif par restriction et sous espace. C'est un espace fermé donc faiblement fermé donc préfaiblement fermé donc $[^\perp(F)]^\perp = F$ et donc $F \simeq (E/^\perp(F))'$ séparable et réflexif, donc $E/^\perp(F)$ séparable et réflexif, donc une boule du dual F est métrisable pour la topologie préfaible (theorème 101) donc séquentiellement compacte. On extrait donc de (x_n), (x_{n_k}) convergeant faiblement pour $\sigma(F, E/^\perp(F))$ mais par definition du quotient $E \to E/^\perp(F)$ est continue donc l'application transposée $F \subset E'$ est préfaiblement continue et donc (x_{n_k}) converge préfaiblement pour $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$. □

6.1 Convexité uniforme

On va obtenir un critère géométrique de réflexivité.

Définition 41. Un espace vectoriel normé est dit uniformément convexe si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$ et $||x - y|| > \epsilon$ alors $||\frac{x+y}{2}|| \leq 1 - \delta$.

Cette notion dépend de la norme (deux normes équivalentes peuvent être l'une uniformément convexe et pas l'autre, cf. dans $\mathbb{R}^d$.) Dessin (norme 1 et 2). C'est une version uniforme sur les points d'une convexité stricte de la boule.

Théorème 105 (de Milman-Pettis)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. On fait une preuve légèrement moins élémentaire que dans Brézis, mais que l'on trouve plus parlante :

(1)On montre que l'on peut étendre la relation d'uniforme convexité à $y \in E'', J(x) \in E'', x \in E$. Par le lemme de Goldstine, comme $||y|| \leq 1$, on a une suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ et $x_i \in E, ||x_i|| \leq 1$ telle que $J(x_i) \rightharpoonup^* y$ pour $\sigma(E'', E')$.

Or $J(x) - J(x_i) \rightharpoonup^* J(x) - y$, donc pour $f \in E'$, $|[J(x) - J(x_i)](f)| \to |[J(x) - y](f)|$ et $|[J(x) - J(x_i)](f)| \leq ||f||\ ||x - x_i||$ donc en passant à la liminf

$$|[J(x) - y](f)| \leq \sup_i \inf_{j \geq i, j \in I} ||f||\ ||x - x_j||$$

et en passant au sup sur f dans la boule unité (on refait la preuve pour les suites généralisées bornées de la proposition 87 2.)

$$||J(x) - y||_{E''} \leq \sup_{j \in I} \inf_{j \geq i, j \in I} ||x - x_j||$$

Donc si on suppose $||J(x) - y||_{E''} > \epsilon$ comme dans la convexité uniforme, on a pour un $i \in I$, $\inf_{j \geq i, j \in I} ||x - x_j|| > \epsilon$. Pour tout $j \geq i$ on a $||x - x_j|| > \epsilon$ on a par hypothèse $\left\|\frac{x+x_j}{2}\right\| \leq 1 - \delta$ donc $\sup_{j \geq i, j \in I} ||\frac{x+x_j}{2}|| \leq 1 - \delta$ Donc a fortiori comme avant vu $J(\frac{x+x_j}{2}) \rightharpoonup^* \frac{J(x)+y}{2}$:

$$\left\|\frac{J(x)+y}{2}\right\|_{E''} \leq \sup_{j \in I} \inf_{j \geq i, j \in I} \left\|\frac{x+x_j}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

On pourrait faire le même raisonnement en x pour montrer que forcément E'' est uniformément convexe (ce qui était attendu puisqu'à la fin $E'' = J(E)$)

(2) On conclut maintenant en vérifiant que l'uniforme convexité donne une inégalité en norme à partir d'une convergence faible (grâce à l'uniformité des constantes...) On va ainsi montrer que $J(B_E(0,1))$ est normiquement dense dans $B_{E''}(0,1)$(donc $J(\overline{B_E(0,1)})$ est normiquement dense dans $\overline{B_{E''}(0,1)}$ la boule normique fermée, mais comme $J(\overline{B_E(0,1)})$ est déjà fermé comme E est complet, on déduit que ces deux boules sont égales).

Soit $x \in B_{E''}(0,1)$ et $f \in E'$, $||f|| \leq 1$ avec $|x(f)| \geq (1-\delta/2)||x||$.

On regarde le voisinage $V = \{y \in E'', |(y-x)(f)| < \delta||x||\}$ de la topologie $\sigma(E'', E')$, par densité du lemme de Goldstine, il existe $X \in E$, $||X|| \leq ||x||$ avec $J(X) \in V$ donc

$$||\frac{J(X)+x}{2}|| \geq |\frac{J(X)+x}{2}(f)| \geq |x(f)| - |\frac{(J(X)-x)(f)}{2}| \geq (1-\delta)||x||$$

En appliquant la contraposée de l'uniforme convexité du (1) à $J(X)/||x||, x/||x||$, on obtient

$$||J(X) - x|| \leq \epsilon||x||.$$

Ceci conclut à la densité normique voulue. □

6.2 Exemples

Exemple 33. Pour μ σ-fini, pour $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega, \mu), \ell^p(\mathbb{N})$ est réflexif (par le théorème de dualité/représentation de Riesz, chapitre 7). L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ (cf chapitre 7) est donc aussi réflexif dans ce cas comme sous espace de $L^p(\Omega, \mu) \oplus^p L^p(\Omega, \mu) \simeq L^p(\Omega, \mu) \oplus^1 L^p(\Omega, \mu)$ (avec norme équvalente).

Exemple 34. $L^1([0,1], \mu), L^\infty([0,1], \mu)$ ne sont PAS réflexif, car les espaces L^1, ℓ^1 sont séparables et leur dual L^∞, ℓ^∞ ne l'est pas (la réflexivité contredirait le théorème 103 (2).

Exemple 35. $c_0(\mathbb{N}), \ell^1(\mathbb{N}), \ell^\infty(\mathbb{N}), K(H), TC(H), B(H)$ (cf chapitre 6) avec H Hilbert de dimension infinie ne sont pas réflexifs, car $(c_0(\mathbb{N})'' = \ell^\infty(\mathbb{N}) \neq J(c_0(\mathbb{N})), (K(H))'' = B(H) \neq J(K(H))$ (Id n'est pas compact par le theorème de compacité de Riesz en dimension infinie, et J l'inclusion standard). Les autres résultats se déduisent par dualité.

Lemme 106. *Pour μ σ-fini, pour $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega, \mu)$ est uniformément convexe.*

Démonstration. On admet le cas $1 < p < 2$ (cf Brézis pour une référence). Le cas $p \geq 2$ vient de la première inégalité de Clarkson (généralisant l'identité du parallélogramme)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(||f||_p^p + ||g||_p^p)$$

on prend alors $\delta = 1 - (1 - (\epsilon/2)^p)^{1/p}$. En intégrant l'inégalité voulue vient du cas $f = a, g = b$ des nombres. On remarque $(a^p + b^p \leq a^2 + b^2)^{p/2}$ par étude de variation d'une fonction (car $b = 1$) et homogénéité.

Puis par l'identité du parallélogramme et la convexité de $|x|^{p/2}$ on obtient :

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^p \leq \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2\right)^{p/2} \left(\frac{|f|^2}{2} + \frac{|g|^2}{2}\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p)$$

□

7 Compacité pour la topologie faible

On a d'abord un résultat général (dont le sens utile est évident).

Théorème 107 (de Kakutani)**.** *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est faiblement compacte (donc pour $\sigma(E, E')$)*

Démonstration. Si E réflexif, alors $E = E''$ et $\sigma(E, E') = \sigma(E'', E')$ donc la compacité préfaible vient du théorème de Banach-Alaoglu.

Réciproquement, supposons la boule B compacte $\sigma(E, E')$ et considérons $J : E \to E''$ est normiquement continue, donc continue pour $\sigma(E, E') \to \sigma(E'', E''')$ donc a fortiori pour $\sigma(E, E') \to \sigma(E'', E')$ (topologie d'arrivée plus faible). Donc (par image continue) $J(B)$ est compacte pour $\sigma(E'', E')$ donc fermé, mais elle est aussi dense dans la boule du bidual par le lemme de Goldstine, donc elle lui est égale et J surjective. □

7.1 Cas de $L^1(\Omega, P)$, P probabilité et uniforme intégrabilité [facultatif]

On considère ici un espace mesuré (Ω, P) avec $P(\Omega) = 1$ (une probabilité). On note $\mathbf{E}(X) = \int XdP$.

Définition 42. Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables de $L^1(\Omega, P)$ est dite **uniformément intégrable** (u.i.) si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{|X_i|>c} |X_i| dP = 0.$$

Le résultat suivant montre qu'être uniformément intégrable est équivalent à la compacité séquentielle faible dans $L^1(\Omega, \mathcal{T}, P)$. C'est pourquoi cette notion est importante pour la théorie des martingales en probabilité. La théorie des martingales (à valeur espace de Banach) a d'ailleurs de nombreux liens avec la géométrie des espaces de Banach (cf. travaux de Gilles Pisier, livre à venir...)

Théorème 108 (Dunford-Pettis)**.** *Soit une famille F dans $L^1(\Omega, \mathcal{T}, P)$ avec $\mathcal{T}$ une tribu dénombrablement engendrée. On a l'équivalence entre*

1. *F est uniformément intégrable*
2. *Toute suite (X_n) de F admet une sous-suite (X_{n_k}) ayant pour limite faible $X \in L^1$, c'est-à-dire :*
$$\forall f \in L^\infty(\Omega), \quad \mathbf{E}((X_{n_k} - X)f) \to 0.$$
3. *F est bornée dans L^1 et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{T}$ vérifie $P(A) \leq \eta$ alors pour tout $f \in F$, $\mathbf{E}(1_A|f|) \leq \epsilon$.*

C'est surtout l'équivalence entre 1. et 2. qui est difficile et porte le nom de théorème de Dunford-Pettis. L'hypothèse "dénombrablement engendrée" n'est pas nécessaire (cf. Delacherie-Meyer *Probabilités et Potentiel* Vol 1 p 27 dont les idées de la démonstration suivante sont tirées) mais nous la faisons pour simplifier.

Preuve : On commence par l'équivalence entre 1 et 3. Supposons 3. et fixons $\epsilon > 0$, η t.q. $P(A) \leq \eta$ implique $\mathbf{E}(1_A|X_n|) \leq \epsilon$. Par l'inégalité de Markov $P(|X_n| \geq c) \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(|X_n|)}{c} \leq \eta$ dès que $c \geq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(|X_n|)}{\eta}$, en appliquant alors à $A = \{|X_n| \geq c\}$, on déduit $\sup_n \mathbf{E}(1_{\{|X_n|\geq c\}}|X_n|) \leq \epsilon$. Et donc $\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbf{E}(1_{\{|X_n|\geq c\}}|X_n|) = 0$ qui est l'uniforme intégrabilité recherchée.

Réciproquement, pour $\epsilon > 0$ fixé, on prend $c > 0$ tel que $\sup_n \mathbf{E}(1_{\{|X_n| \geq c\}}|X_n|) \leq \epsilon/2$, (en particulier

$$\mathbf{E}(|X_n|) = \mathbf{E}(1_{\{|X_n| \geq c\}}|X_n|) + \mathbf{E}(1_{\{|X_n| < c\}}|X_n|) \leq c + \epsilon/2$$

donc (X_n) et bornée dans L^1, de sorte que

$$\mathbf{E}(1_A|X_n|) = \mathbf{E}(1_A 1_{\{|X_n| \geq c\}}|X_n|) + \mathbf{E}(1_A 1_{\{|X_n| < c\}}|X_n|) \leq \mathbf{E}(1_{\{|X_n| \geq c\}}|X_n|) + \mathbf{E}(1_A 1_{\{|X_n| < c\}} c) \leq \epsilon/2 + P(A)c$$

qui est borné par ϵ dès que $P(A) \leq \eta = \epsilon/2c$ qui convient.

On suppose maintenant 3 et on montre 2. Si $\mathcal{T} = \sigma(A_n, n \in \mathbb{N})$, $\mathcal{A}$ l'algèbre engendré par les A_n c'est à dire les unions finies d'intersections finies de A_n, A_n^c (qui n'est en général pas une σ algèbre mais) qui est stable par, complémentaire union finie et intersection finie. Il est facile de voir que $\mathcal{A}$ est dénombrable.

En séparant les parties réelle/imaginaire puis positive/négative, on peut supposer $X_n \geq 0$ et par extraction diagonale, on trouve (n_k) telle que $\mathbf{E}[X_{n_k} 1_A] \to \mu(A)$ converge pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Il est facile de voir que $\mu(\Omega) < \infty$ vu que (X_n) est bornée dans L^1 (par 3.) μ est additive sur les unions disjointes finies (par additivité de $A \mapsto \mathbf{E}[X_{n_k} 1_A]$ qui est une mesure et passage à la limite). De plus, par 3., soit ϵ positive, on a un η tel que $P(A) \leq \eta$ implique $\mathbf{E}[X_{n_k} 1_A] \leq \epsilon$ donc $\mu(A) \leq \epsilon$.

En particulier si $P(A) = 0$, on a $\mu(A) = 0$.

Un résultat classique de théorie de la mesure dit que μ s'étend de façon unique sur $\sigma(\mathcal{A})$ en une mesure μ^* (cf. par exemple livre de Probabilités de Barbe-Ledoux Th 1.4.9). Il est facile de voir que l'on a encore si $P(A) = 0$, on a $\mu^*(A) = 0$. Donc, $\mu^* \ll P$ et par le théorème de Radom-Nikodym, il existe $X \in L^1$ telle que $\mathbf{E}(X 1_A) = \mu(A) = \lim_{n \to_i nfty} \mathbf{E}[X_{n_k} 1_A]$. Il en est donc de même pour toute fonction étagée f_m (resp. g_m) d'une suite décroissante (resp. croissante) convergeant vers f mesurable positive bornée.

D'où on a les deux inégalités donnant l'égalité

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{E}[X_{n_k} f] \leq \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[X_{n_k} f_m] = \mathbf{E}(X f_m) \to \mathbf{E}(Xf)$$

$$\liminf_{n \to \infty} \mathbf{E}[X_{n_k} f] \geq \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[X_{n_k} g_m] = \mathbf{E}(X g_m) \to \mathbf{E}(Xf).$$

On a donc obtenu 2.

On prouve l'implication de 2. vers 3. par contraposée. Si F n'est pas bornée, on a une suite (X_n) de F non bornée, donc comme une suite faiblement convergente est bornée, X_n n'a pas de sous-suite faiblement convergente. Si X_n est bornée mais qu'il existe $\epsilon > 0, A_n, P(A_n) \leq 1/n$ avec $\mathbf{E}(X_n 1_{A_n}) \geq \epsilon$. On doit voir que X_n n'a pas de sous-suite faiblement convergente.

Il suffit de monter qu'une suite faiblement convergente (X_n) dans L^1 (donc bornée dans L^1) vérifie (3). On va le déduire du théorème de Baire appliqué à l'ensemble $\Phi = \{1_A, A \in \mathcal{T}\} \subset L^1(\Omega)$ qui est fermé (limite est aussi limite d'une sous-suite préfaiblement dans L^∞ et vérifie $f^2 = f$ donc est à valeur $\{0, 1, \}$ donc $f = 1_A$) donc complet. Soit $\epsilon > 0$ et le fermé

$$F_j = \{U \in \Phi, \forall n, m \geq j |\mathbf{E}(X_n U) - \mathbf{E}(X_m U)| \leq \epsilon\}$$

$\cup F_j = U$ car $\mathbf{E}(X_n U)$ converge comme X_n faiblement convergente. Donc par le théorème de Baire $Int(F_j) \neq \emptyset$, soit $V = 1_A \in Int(F_j)$, on a $\eta > 0$ avec $||1_B - 1_A||_1 \leq \eta$ implique $|\mathbf{E}(X_n 1_B) - \mathbf{E}(X_m 1_B)| \leq \epsilon$ pour $m, n \geq j$. Enfin si on choisit $\eta' < \eta$ tel que si $P(B) \leq \eta'$ $|\mathbf{E}(X_i 1_B)| \leq \epsilon$ pour $i \leq j$. En appliquant à $B \cap \{X_n \geq 0\}$ et $B \cap \{X_n \leq 0\}$ on obtient $\mathbf{E}(|X_n| 1_C) \leq 2\epsilon$.

Alors pour $n \geq j$, comme $1_C = 1_{C \cup A} - 1_{A \cap C^c}$ on a

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}(X_n 1_C)| &\leq |\mathbf{E}(X_n 1_{C \cup A} - X_n 1_A)| + |\mathbf{E}(X_n 1_{A \cap C^c} - X_n 1_A)| \\ &\leq |\mathbf{E}(X_j 1_{C \cup A} - X_j 1_A)| + |\mathbf{E}(X_n 1_{A \cap C^c} - X_j 1_A)| \\ &+ |\mathbf{E}(X_n 1_{C \cup A} - X_j 1_{C \cup A})| + |\mathbf{E}(X_n 1_{A \cap C^c} - X_j 1_{A \cap C^c})| + 2|\mathbf{E}(X_j 1_A - X_n 1_A)| \leq 8\epsilon\end{aligned}$$

dès que $P(C) \leq \eta'$ (ce qui implique $||1_{A \cap C^c} - 1_A||_1, ||1_{A \cup C} - 1_A||_1 \leq \eta$ permettant de borner les termes avec j, n par la conclusion de $A \in Int(L_j)$, les autres vérifient $|\mathbf{E}(X_j 1_{C \cup A} - X_j 1_A)| \leq E(|X_j| 1_C))$. Comme un $B \subset C$ vérifie la même hypothèse, on peut l'appliquer à $C \cap \{X_n \geq 0\}$ et $C \cap \{X_n \leq 0\}$ et obtenir pour tout $n \geq j$ (donc pour tout n) si $P(C) \leq \eta'$:

$$\mathbf{E}(|X_n| 1_C) \leq 16\epsilon.$$

On a donc l'uniforme intégrabilité demandée sous forme (3). ■

Chapitre 6

Opérateurs linéaires bornés

Nous avons déjà étudiés $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues entre espaces de Banach E,F et $B(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. Le but de ce chapitre est d'étudier des classes particulières d'opérateurs et les aspects spectraux des opérateurs de B(H).

1 Opérateurs compacts

Définition 43. Soit E,F des espaces de Banach. Un application linéaire continue u (opérateur) est dit compacte si l'adhérence de l'image de la boule unité $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte dans F. ON note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compact.

Théorème 109. *Si E,F des espaces de Banach, $K(E,F)$ est un sous-espace de Banach de $L(E,F)$. Il contient les opérateurs de rang fini (i.e. d'image de dimension fini). C'est un idéal (bilatère), dans le sens où si G est un autre espace de Banach : si $u \in K(E,F), v \in L(F,G)$ ou si $u \in L(E,F)$ et $v \in K(F,G)$ alors $v \circ u \in K(E,G)$. De plus si $u \in K(E,F)$ alors $u^t \in K(F',E')$.*

Démonstration. cf DM. □

Exemple 36. L'injection canonique $C^{k,\alpha}(\Omega) \to C^{k,\alpha'}(\Omega), \alpha' < \alpha$ pour Ω ouvert borné est compacte par la proposition 41. De même, l'injection $W^{1,p}(I) \to C^0(\overline{I})$ pour $p > 1$ est compacte pour I intervalle ouvert borné en combinant le résultat précédent avec le Théorème 43(3). Combinant avec l'inclusion $C^0(I) \subset L^2(I)$ on a donc $H^1(I) = W^{1,2}(I) \to L^2(I)$ un opérateur compact entre espaces de Hilbert. Si Δ désigne $\Delta(u) = u''$ alors on a vu (section 5.1 du chapitre 4 avec $p = q = 1$) que $(-\Delta+1) : H_0^2(]0,1[) = W_0^{2,2}(]0,1[) \to L^2([0,1])$ admet un inverse. Par le théorème de l'application ouverte il est continue et en le composant avec l'injection canonique on obtient

$$(-\Delta+1)^{-1} : L^2([0,1]) \to W_0^{2,2}(]0,1[) \to L^2([0,1])$$

est un opérateur compact. On verra qu'il a donc une suite de valeurs propres.

2 Introduction à la théorie spectrale sur un espace de Hilbert

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de valeur propre au espaces de Hilbert de dimension infinie. La différence majeure par rapport à la dimension finie est que la bijectivité et l'injectivité d'un opérateur ne sont plus équivalentes.

$T \in B(H)$ est dit inversible si il existe $T^{-1} \in B(H)$ telle que $T^{-1}T = TT^{-1} = Id$

Définition 44. Soit $T \in B(H)$. $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de T si $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. C'est une **valeur spectrale** si $T - \lambda I$ n'est pas inversible. On note $\sigma(T)$ l'ensemble des valeurs spectrales et $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs propres.

Le **résolvant** de T est l'ensemble :

$$\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \in B(H)\}$$

Théorème 110. *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in B(H)$ alors $\sigma(T)$ est un compact non-vide tel que $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.*

*De plus, on a existence de la limite (appelée formule de Beurling du **rayon spectral**) :*

$$r(T) := \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$$

et $||T||^2 = r(T^*T)$. Si $T = T^*$, alors $r(T) = ||T||$.

Si le spectre est non-vide, l'ensemble des valeurs propres peut-être vide (cf TD.)

Démonstration. (1) On commence par voir que $\rho(T)$ **est ouvert** en utilisant la série de Neumann. si $\lambda \in \rho(T)$, on écrit

$$T - \mu I = T - \lambda I + (\lambda - \mu)I = (T - \lambda I)(I + (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1})$$

Le deuxième terme est inversible si $|(\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}|| = |\lambda - \mu|||(T - \lambda I)^{-1}|| < 1$, $u = -(\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ est absolument convergente et la série géométrique donne $I - u^n = (\sum_{k=0}^{n-1} u^k)(I - u) \to 1$ (et une équation similaire après commutation) d'où $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = (1 - u)^{-1}$. On déduit donc que $T - \mu I$ est inversible d'inverse :

$$(T - \mu I)^{-1} = (I + (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1})^{-1}(T - \lambda I)^{-1}.$$

Donc $\rho(T)$ est bien ouvert et donc $\sigma(T)$ est fermé. De plus

$$||(T - \mu I)^{-1} - (T - \lambda I)^{-1} + (T - \lambda I)^{-1}(\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}|| \leq \sum_{k=2}^{\infty} ||u||^k = o(|\lambda - \mu|)$$

donc $z \in \rho(a) \to (T - zI^{-1})$ est différentiable au sens complexe.

(2) On a $||T^{n+m}|| \leq ||T^m||||T^n||$ Soit n_0 fixé, en faisant la division euclidienne de $n = p(n)n_0 + q(n)$ et $||T^n|| \leq ||T^{n_0}||^{p(n)}||T||^{q(n)}$ donc

$$\limsup_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} ||T^{n_0}||^{p(n)/n}||T||^{q(n)/n} = ||T^{n_0}||^{1/n_0}.$$

Donc en passant à l'inf́emum

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} ||T^n||^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}^*} ||T^n||^{1/n}$$

d'où l'existence de la limite.

(3) Voyons que si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $|\lambda| \leq r(T)$ ce qui montre que $\sigma(T)$ est compacte (car fermé borné). Par contraposé, soit λ avec $|\lambda| > r > r(T)$ et donc pour n grand $r^n \geq ||T^n||$ donc la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}T^n$ est absolument convergente et donne l'inverse $(\lambda I - T)^{-1}$ par un calcul simple avec les séries géométriques comme précédemment.

(4)Montrons par l'absurde que $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sinon, voyons que $z \in \mathbb{C} \to (T - zI^{-1})$ est bornée. En effet, pour $|z| > 2||T||$ comme ci dessus, la série donne la borne

$$||(zI - T)^{-1}|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||T||^n |z^{-n-1}| \leq 2/|z| \leq 1/||T||$$

Et par continuité $||(T - zI)^{-1}||$ est bornée sur le compact $B_F(0, 2||T||)$, d'où la bornitude sur $\mathbb{C}$. Or pour $f \in (B(H))'$ on déduit par composition que $f((T - zI^{-1}))$ est différentiable au sens complexe donc analytique sur $\mathbb{C}$ et bornée, donc par le théorème de Liouville (cf Analyse complexe Rudin Th 10.23) elle est constante donc $f((T - 1I)^{-1}) = f(T^{-1})$ donc par Hahn-Banach,$(T - 1I)^{-1} = T^{-1}$ donc $T = T - 1$ une contradiction.

(5) Il reste à montrer les formules pour le rayon spectral. On a déjà vu $r'(T) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\} \leq r(T)$. Sur le disque $B(0, 1/r'(T))$ la fonction $1 - zT$ est inversible et pour $f \in (B(H))'$

on a $z \mapsto f((1 - zT)^{-1})$ analytique par le calcul du (3) et composition avec une fonction linéaire continue. Si $|z| \leq 1/||a||$ on a la série $f((1 - zT)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f(T^n)$ donnant le développement de Taylor qui s'étend pour $|z| < 1/r'(T)$ (la fonction de gauche étend analytique donc continue donc bornée sur un disque fermé de rayon $r < 1/r'(T)$, on déduit des estimations de Cauchy (Rudin Th 10.26) que sur ce disque, la série entière de droite converge et donc une borne sur le rayon de convergence de la série et l'égalité s'en déduit) donc pour tout $f \in (B(H))'$, $f(z^n T^n) \to 0$, soit $z^n T^n \rightharpoonup 0$ pour la topologie faible donc d'après la proposition 87 (2) (la conséquence de Banach-Steinhaus), $z^n T^n$ est bornée donc $||z^n T^n|| \leq M$ soit $||T^n||^{1/n} \leq M^{1/n}/|z| \to 1/|z|$ donc en passant à la limite : $r(T) \leq 1/|z| \to r'(T)$ (la dernière limite car z arbitraire avec $|z| < 1/r'(T)$).

(6) Le calcul de $\sigma(T^*)$ est évident car $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si $T = T^*$, $||T^{2^n}|| = ||T||^{2^n}$ (car $||T^*T|| = ||T^2|| = ||T||^2$ et par induction) d'où la limite $r(T) = ||T||$. Le cas général vient de $||T||^2 = ||T^*T||$ qui ramène au cas hermitien.

□

Exemple 37. (cf TD.) si T positif $\sigma(T) \subset [0, \infty[$ et si $T = T^*$ et

$$m = \inf\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}, M = \sup\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}$$

on a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ et même $\sigma(T) \subset [m, M]$.

2.1 Calcul fonctionnel continue des opérateurs hermitiens

Pour $P \in \mathbb{C}[x]$, $P(t) = \sum a_i t^i$ on définit $p(T) = \sum a_i T^i$.

Lemme 111. *Soit $T \in B(H)$ et $p \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme, alors $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.*

Démonstration. Si p est constant, c'est évident (le spectre d'une constante a est $\{a\}$ car $\mathbb{C}$ est un corps). Sinon pour $\mu \in \mathbb{C}$, en décomposant grâce à l'existence de racines $p(T) - \mu = \lambda_0(T - \lambda I_1)...(T - \lambda I_n)$ et $\mu \in \rho(p(T))$ ssi $\lambda_1, ...\lambda_n \in \rho(T)$. (en effet pour le «seulement si»,$\lambda_0(T - \lambda I_1)...(T - \lambda I_n)(p(T) - \mu)^{-1} = Id$ donne par commutation un inverse à tous les $(T - \lambda I_i)$)

Donc $\mu \in \sigma(p(T))$ ssi il existe $\lambda_i \in \sigma(T)$ et $p(\lambda_i) = \mu$ donc $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ (en effet $\subset$ est devenu simple et si $\mu \notin \sigma(p(T))$ alors pour tous les λ_i tels que $p(\lambda_i) = \mu$ on a $\lambda_i \notin \sigma(T)$ donc $\mu \notin p(\sigma(T))$).

□

Exemple 38. Si $P = P^2 \in B(H)$ est une projection, alors $f(x) = x - x^2$ envoie $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)) = \{0\}$ donc $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$ l'ensemble des racines de f.

Théorème 112. *Soit $T = T^* \in B(H)$, hermitien (H espace de Hilbert complexe). L'application $P \mapsto P(T)$ s'étend de $\mathbb{C}[x]$ en une unique application isométrique linéaire notée $f \mapsto f(T)$ de*

$$C^0(\sigma(T)) \to B(H).$$

De plus, c'est un $*$-homomorphisme soit $(fg)(T) = f(T)g(T)$ et $(f(T))^* = \overline{f}(T)$ et

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

$f(T)$ est autoadjoint ssi f est à valeur réelle sur $\sigma(T)$.

Démonstration. (1) Pour l'existence de l'extension, il suffit de voir que l'application est isométrique sur les polynômes car elle sera donc uniformément continue (sur un espace dense par le théorème de Stone-Weierstrass) donc elle aura un unique prolongement.

Mais, il est facile de voir $(P(T))^* = \overline{P}(T^*) = \overline{P}(T)$ donc

$$||P(T)||^2 = r(P^*(T)P(T)) = \sup_{\lambda \in \sigma(|P|^2(T))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in |P|^2(\sigma(T))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P|^2(\lambda) = |||P|^2||_{C^0(\sigma(T))} = ||P||^2_{C^0(\sigma(T))}.$$

D'où l'isométrie cherchée. Les relations de $*$-homomorphisme s'obtiennent par prolongement. Si f à valeur réelle $f(T) + (f(T))^* = (2\,\mathrm{Re}(f))(T) = 2f(T)$ donc $f(T)$ est autoadjoint et réciproquement si f n'est pas à valeur réelle $\sigma(f(T))$ contient une valeure complexe et donc $f(T)$ n'est pas autoadjoint par l'ex 37. (2) Reste le calcul du spectre de l'image. Si $\lambda \notin f(\sigma(T))$ alors $g = 1/(\lambda - f)$ est continue (donc bornée) sur $\sigma(T)$ (compacte) et donc $g(T)$ est l'inverse de $(f(T) - \lambda)$ et donc $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$. Réciproquement si $t \in \rho(f(T))$, et soit $g_n = (1/n + |t - f|^2)^{-1}$ qui existe dans des fonctions continues. Or par l'isométrie

$$||g_n|| = ||g_n(T)|| = ||(1/n + |t - f(T)|^2)^{-1}|| \to ||(|t - f(T)|^2)^{-1}||$$

car $]-\infty, 0] \subset \rho(|t - f(T)|^2)$ par hypothèse (pour l'inversibilité en 0 et la postivité), d'où la limite par continuité du résolvant sur l'ensemble résolvant. Donc $\sup_n \sup_{x \in \sigma(T)} (1/n + |t - f(x)|^2)^{-1} = ||(|t - f(T)|^2)^{-1}|| < \infty$ donc $|t - f|^{-2}$, comme la limite croissante des g_n, est bornée et la convergence de l'image par l'isométrie implique la convergence dans $C^0(\sigma(T))$ et donc $|t - f|$ inversible sur $\sigma(T)$ donc $t \notin f(\sigma(T))$. □

Exemple 39. Si T hermitien avec $\sigma(T) \subset [0, \infty[$ alors pour $\alpha > 0$, on peut définir T^α avec $\sigma(T^\alpha) \subset [0, \infty[$ et en particulier $T = T^{1/2}T^{1/2}$ donc T positif.

Exemple 40. On définit $|T| = (T^*T)^{1/2}$ qui est toujours hermitien positif.

Exemple 41. Si $T = T^*$ et $||T|| \leq 1$, $u = T + i\sqrt{1 - T^2}$ et $v = T - i\sqrt{1 - T^2}$, sont bien définis et unitaires et $T = (u + v)/2$ de sorte que les unitaires engendrent $B(H)$.

2.2 Décomposition polaire

Exemple 42. On définit $|T| = (T^*T)^{1/2}$ qui est toujours hermitien positif.

Théorème 113. *Soit $T \in B(H)$, alors il existe un unique operateur u isométrique sur $ker(u)^\perp$ (on dit u* ***isométrie partielle****) tel que*

$$T = u|T| \quad et \quad ker(T) = ker(u).$$

De plus on a $u^*T = |T|$.

Démonstration. Pour $x \in H$ on remarque que $|||T|(x)|| = ||T(x)||$ donc pour $x \in \overline{Im(|T|)}$, on pose $u_0(|T|)(x) = T(x)$, qui définit une isométrie et s'étend donc par continuité en $u_1 : \overline{Im(|T|)} \to H$.

On pose $u(x+y) = u_0(x)$ sur la décomposition $x + y \in \overline{Im(|T|)} \oplus Ker(|T|)$. Comme $Ker(u)^\perp = \overline{Im(|T|)}$, on a $Ker(u) = Ker(|T|)$ et que u est isométrique là, c'est bien une isométrie partielle et comme par construction $u|T| = T$ on obtient l'existence car Donc $Ker(T) = Ker(|T|)$ puisque $||Tx|| = |||T|x||$.

On a $\langle u^*Tx, |T|y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle = \langle |T|x, |T|y\rangle$ donc $u^*Tx - |T|x$ est orthogonal à $Im(|T|)$ mais par construction, aussi à $Im(|T|)^\perp$, donc $u^*Tx - |T|x = 0$ et $u^*T = |T|$ comme attendu.

Enfin, une isométrie partielle w vérifiant les deux résultats doit avoir $w|T| = v$ donc $w = u$ sur $\overline{Im(|T|)}$ et $w = 0$ sur $Ker(T) = Ker(u) = Im(|T|)^\perp$, donc $w = u$. □

3 Opérateurs compacts et à Trace sur un espace de Hilbert

Définition 45. $T \in B(H)$ est dit **compact** si $\{u(x), ||x|| \le 1\}$ est compact. On note $K(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

$T \in B(H)$ est dit **à trace** si pour une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ la somme suivante est sommable :

$$||T||_1 = \sum_{i\in I} \langle |T|(e_i), e_i\rangle < \infty.$$

On note $S^1(H)$ l'ensemble des opérateurs à trace. $T \in B(H)$ est dit **de Hilbert-Schmidt** si pour une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ la somme suivante est sommable :

$$||T||_2^2 = \sum_{i\in I} ||T(e_i)||_2^2 < \infty.$$

On note $S^2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert Schmidt.

Lemme 114. *Pour $T \in S^1(H)$, la formule pour $||.||_1$ et la formule de la trace ci-dessous ne dépendent pas de la base base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$:*

$$tr(T) = \sum_{i\in I} \langle T(e_i), e_i\rangle.$$

Si $U, V \in S^2(H), U^*V \in S^1(H)$ et $tr(U^*V)$ définit le produit scalaire faisant de $S^2(H)$ un espace de Hilbert. De plus $T \in S^1(H)$ implique $T^* \in S^1(H)$.

Démonstration. (exo. cf TD.) □

Théorème 115. *Si $T \in K(H)$ et H de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$. De plus, $\sigma(T) - \{0\} \subset \sigma_p(T)$ et l'espace propre $E_\lambda = Ker(T - \lambda I)$ pour $\lambda \ne 0$ est de dimension finie. De plus, $T^*, |T| \in K(H)$, les opérateurs de rang fini sont denses dans $K(H)$ et si $T = T^*$ les E_λ sont orthogonaux et on a le résultat de diagonalisation sous forme de famille sommable (p_λ le projecteur orthogonal sur E_λ)*

$$T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} \lambda p_\lambda.$$

Le dernier enoncé veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J \subset \sigma(T) - \{0\}$ tel que pour $K \supset J$, $||T - \sum_{\lambda\in K} \lambda p_\lambda|| \le \epsilon$.

Démonstration. (1) Par multiplication, comme $E_\lambda = Ker(T/\lambda - I)$, il suffit de voir que E_1 est de dimension finie, mais si B est sa boule unité fermé $B = T(B) \subset E_1 \cap T(B_{H,F}(0,1)) \cap E_1$ qui est donc un compact comme E_1 est fermé, donc par le théorème 10, E_1 doit être de dimension finie.

(2) Si T est compact comme $|T| = u^*T$ par la décomposition polaire, $|T|(B)$ est l'image du compact $T(B)$ par l'application continue u^* donc est compact. Comme $T^* = |T|u^*$ et u^* est une contraction, si $||x_n|| \leq 1$, $||u^*(x_n)|| \leq 1$ donc par compacité de $|T|$, $T^*(x_{n_k}) \to x$ converge, mais par compacité faible on peut extraire $y_n \rightharpoonup y$ (une suite généralisée) de x_{n_k} et alors $T^*(y_n) \rightharpoonup T^*(y) = x$ donc $x \in T^*(B)$ qui est bien compact.

(3) $0 \in \sigma(T)$ car sinon T^{-1} continue et comme ci-dessus $T^{-1}T = Id$ serait compacte, donc aussi la boule unité fermée de H, ce qui par le théorème 10 implique H de dimension finie.

(4) Pour montrer que, disons $1 \in \sigma(T) \Leftrightarrow 1 \in \sigma_p(T)$, il faut voir que $I - T$ injectif si et seulement si $(1 - T)$ inversible. Dans le seul sens non trivial si $(I - T)$ injectif, d'abord $Im(I - T)$ fermée car si $u_n - T(u_n) \to f$ Si $||u_n|| \to \infty$ on aurait $w_n = u_n/||u_n||$, $w_n - T(w_n) \to 0$ avec $T(w_{n_k}) \to z \in Ker(I - T) = \{0\}$ et $w_{n_k} \to z = 0$ impliquant la contradiction $1 = ||z|| = 0$ donc (u_n) bornée et quitte à extraire $T(u_n) \to g$ donc $u_n \to f + g$ et donc $f + g - T(f + g) = f$ montrant $Im(I - T)$ fermée.

Supposons enfin par l'absurde $Im(I - T) \neq H$. Si $E_n = Im(I - T)^n$ on a une suite décroissante de sous-espace fermé avec $E_n \neq E_{n+1}$ par injectivité (sans quoi $E_1 = H$) on prend donc

$$x_n \in E_{n+1}^\perp \cap E_n,$$

orthonormale et si $n > m$, $x_n + (T - I)(x_n) - (T - I)(x_m) \in E_{m+1} \perp x_m$ donc $||Tx_n - Tx_m||^2 = ||(x_n - x_m) + (T - I)(x_n) - (T - I)(x_m)||^2 \geq ||x_m||^2 = 1$ ce qui contredit une extraction $T(x_{n_k})$ convergente. Donc $I - T$ surjectif.

Montrons enfin que $(I - T)^{-1}$ continue (c'est aussi une conséquence du théorème de l'application ouverte du chapitre 5 mais on donne une preuve directe) en considérant x_n avec $y_n = x_n - T(x_n) \to 0$, on peut montrer comme ci-dessus (x_n) bornée donc en extrayant $T(x_n) \to l$ $x_n \to l \in Ker(I - T) = \{0\}$ donc $l = 0$ et $(I - T)^{-1}(y_n) = x_n \to 0$.

(5) Si $T = T^*$, $e \in E_\lambda, f \in E_\mu, \lambda \neq \mu$ alors $(\lambda - \mu)\langle e, f\rangle = \langle T(e), f\rangle - \langle e, T(f)\rangle = 0$ d'où l'orthogonalité des espaces propres. En conséquence si λ_n sont des valeurs propres distinctes et e_n les vecteurs propres normés correspondant $T(e_n) = \lambda_n e_n$ sont compactes et orthogonaux donc donc quitte à extraire $T(e_n)$ converge donc $||T(e_n) - T(e_m)||^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \to 0$ donc $\lambda_n \to 0$ est donc la seule valeur d'adhérence. En particulier, si on organise les valeurs propres avec $|\lambda_n|$ (au plus 2 par module comme elles sont réelles) décroissant, on a $|\lambda_n| \to 0$. En particulier, en combinant les bases des espaces propres et une du noyau, on obtient un b.o.n de vecteurs propres.

Enfin si $K \subset \sigma(T) - \{0\}$ fini, on a $T - \sum_{\lambda \in K} Tp_\lambda$ admet la même base de vecteurs propres que T, il est aussi compact et on peut donc lire le spectre sur les vecteurs propres, soit $\sigma(T - \sum_{\lambda \in K} Tp_\lambda) = \sigma(T) - K$ et donc par la formule du rayon spectrale,

$$||(T - \sum_{\lambda \in K} Tp_\lambda)|| = \max_{\lambda \in \sigma(T) - K} |\lambda|.$$

On peut donc bien choisir K_n pour que cela tende vers 0.

(6) Comme $K(H)$ est stable par adjoint, il suffit de montrer pour avoir approximation par les opérateurs de rang fini, que les hermitiens sont approchés et on vient de voir qu'une suite de rang fini $\sum_{\lambda \in K_n} Tp_\lambda = \sum_{\lambda \in K} \lambda p_\lambda$ approche T en norme. □

Proposition 116 (facultatif)**.** *$S^1(H) \subset K(H)$ est un sous-espace vectoriel sur lequel $||.||_1$ est une norme qui donne une inclusion contractante et la suite des valeurs propres $(\lambda_n)_{n \in N}$ avec multiplicité* *(c'est à dire en répétant les valeurs propres multiples) de* $|T| \in S^1(H)$ *vérifie* $\sum_n |\lambda_n| < \infty$ *. De plus,* $B(H)S^1(H) \subset S^1(H)$ *de sorte que*

$$B \mapsto (T \mapsto tr(BT) = \sum_{i \in I} \langle BTe_i, e_i \rangle)$$

définit des isométries surjectives de $T_1 : B(H) \simeq (S^1(H))', T_2 : S^1(H) \simeq (K(H))'$.

Attention $tr(AB) = tr(BA)$ n'est pas toujours vraie, mais c'est le cas si $A, B \in S^2(H)$ ou $A \in S^1(H), B \in B(H)$, mais on ne l'utilisera pas.

Démonstration. (exo. cf TD) □

Chapitre 7

Retour sur les espaces de fonctions classiques

1 Dualité des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

On rappelle que (Ω, μ) est un espace mesuré σ-fini. On se souvient que pour $p \in [1, \infty]$, q tel que $1/p + 1/q = 1$ la proposition 21 donne pour g mesurable :

$$||g||_q = \sup\{\left|\int fgd\mu\right|; ||f||_p \leq 1, f \in L^1(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu), fg \in L^1(\Omega, \mu)\}.$$

On a même le théorème suivant (on notera que $p < \infty$ contrairement au cas de la formule pour la norme) :

Théorème 117. *(de représentation de Riesz L^p) Soit l'application définie grâce à l'inégalité de Hölder :*

$$I : f \in L^q(\Omega, \mu) \mapsto (g \in L^p(\Omega, \mu) \mapsto \int fgd\mu)$$

Alors $I : L^q(\Omega, \mu) \to (L^p(\Omega, \mu))'$, réalise une isométrie SURJECTIVE pour $p \in [1, \infty[$ et q exposant conjugué c'est-à-dire tel que $1/p + 1/q = 1$.

Attention le cas $p = \infty$ est EXCLU... $L^\infty(\Omega)'$ est un espace très gros de mesures sur un espace stonien compact X tel que $L^\infty(\Omega) = C^0(X)$.
Preuve :

On a déjà montré l'isométrie, il reste à voir la surjectivité.

On fixe A_n avec $\mu(A_n) < \infty$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$, A_n croissant.

Le **cas** $p = 2$ **a été traité par le théorème de représentation de Riesz.**

(1) **cas** $p = 1$Soit $\phi \in (L^1(\Omega, \mu))'$ avec $||\phi|| \leq 1$. D'abord on définit T application linéaire continue sur $L^2(\Omega)$ (en fait à valeur dans son dual identifié à lui même) par :

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(\overline{x}y)$$

vu que $\overline{x}y \in L^1(\Omega)$ par Hölder et on a

$$||T|| := \sup\{||Tx||_2, ||x||_2 \leq 1\} = \sup\{|\langle Tx, y\rangle|, ||x||_2 \leq 1, ||y||_2 \leq 1\} \leq ||\phi||_{L^1(\Omega)'}.$$

La première égalité est la définition de la norme des applications linéaires bornées, la deuxième est le résultat de dualité du cas $p = 2$, la troisième utilise Hölder et la définition de la norme du dual. Notons que si $z \in L^\infty(\Omega)$,

$$\langle Tzx, y\rangle = \phi(\overline{zx}y) = \langle Tx, \overline{z}y\rangle = \langle zTx, y\rangle$$

la deuxième relation en utilisant la commutativité des espaces de fonctions soit la relation $\overline{z}\overline{x}y = \overline{x}\overline{z}y$ et la seconde la définition du produit scalaire $\langle Tx, \overline{z}y\rangle = \int \overline{Tx}\overline{z}yd\mu$. donc on déduit si m_z est la multiplication par $z \in L^\infty$, $Tm_z = m_zT$. Montrons que $T = m_g$ pour $g \in L^\infty$. (c'est algèbre est son propre commutant) dans $B(L^2(\Omega))$, elle est maximale commutative).

En effet, soit $x_n = T(1_{A_n}) \in L^2$. On a $||T|| \leq 1$ car $||\phi|| \leq 1$.

Pour $g \in L^\infty$ avec $||g||_1 \leq 1$,

$$|\int T(1)gd\mu| = |\int (|g|^{1/2}T)(1)g|g|^{-1/2}d\mu| = |\int T(|g|^{1/2})g|g|^{-1/2}d\mu| \leq |||g|^{1/2}||_2||g|g|^{-1/2}||_2 = ||g||_1 \leq 1$$

où on a utilisé à la deuxième égalité la commutation avec $m_{|g|^{1/2}}$. On voit donc par la formule de la proposition 21 que $||T(1_{A_n})||_\infty \leq 1$. Comme $T(1_{A_m}) = T(1_{A_m}1_{A_n}) = 1_{A_m}T(1_{A_n})$ donc on définit $g(x) = T(1_{A_n})(x)$ pour $x \in A_n$ de façon cohérente de sorte que $g1_{A_n} = T(1_{A_n})$ d'où $||g||_\infty = \sup_n ||g1_{A_n}||_\infty \leq 1$.

Et pour $z \in\in L^\infty \cap L^1 \subset L^2$ $T(z1_{A_n}) = m_g(z1_{A_n})$ donc par densité dans L^2 $T = m_z$. Enfin pour $f \in L^1(\Omega)$ $f = |f|^{1/2}g$ avec $g \in L^2$, on obtient

$$\phi(f) = \phi(|f|^{1/2}g) = \langle T(|f|^{1/2}), g\rangle = \langle z(|f|^{1/2}), g\rangle = I(\overline{z})(|f|^{1/2}g) = I(\overline{z})(f).$$

donc $\phi = I(\overline{z})$ d'où la surjectivité de I.

(2) **cas** $p > 1$ $\mu(\Omega) < \infty$ **utilisant les cas** $p = 1, 2$. (On l'appliquera ensuite à $\Omega = A_n$.) Après normalisation, on peut supposer $\mu(\Omega) = 1$.

On commence par montrer que via I, $L^p(\Omega)' \subset L^1(\Omega)$. Si $p \leq 2$, c'est évident par l'inclusion $L^2(\Omega) \subset [L^p(\Omega)]$ et par restriction et théorème de representation de Riesz, on obtient $g \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ tel que

$$\phi|_{L^2(\Omega)}(f) = \langle\overline{g}, f\rangle$$

Si $p > 2$ pour $x \in L^\infty$, et $\phi \in (L^p)'$,

$$|\phi(x)|^p \leq \int |x|^p d\mu \leq \int |x|^2||x||_\infty^{p-2}d\mu \leq ||x||_2^2||x||_\infty^{p-2}.$$

Par l'inégalité d'Young (cas particulier d'Holder utilisé dans sa preuve) $|ab| \leq a^P/P + b^Q/Q$ utilisé avec $1/P + 1/Q = 1, P = p/2, Q = p/(p-2)$, $a = ||x||_2^{1/P}/\epsilon^{1/Q}, b = (\epsilon||x||_\infty)^{1/Q}$, on obtient :

$$|\phi(x)| \leq \frac{\epsilon}{Q}||x||_\infty + \frac{1}{P\epsilon^{P/Q}}||x||_2.$$

En incluant $\{(x, x), x \in (L^\infty(\Omega))\} \subset L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$ avec norme $||(x, y)|| = \frac{\epsilon}{Q}||x||_\infty + \frac{1}{P\epsilon^{P/Q}}||y||_2$ on étend par Hahn Banach ϕ à $L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donnant un élément de $(\phi_1, \phi_2) \in L^\infty(\Omega)' \times L^2(\Omega)$ avec $||\phi_1|| \leq \epsilon/Q, ||\phi_2|| \leq \frac{1}{P\epsilon^{P/Q}}$ (car en calculant la norme duale on a $\max(Q||\phi_1||/\epsilon, P\epsilon^{P/Q}||\phi_2||) \leq 1$) Donc $||\phi|_{L^\infty(\Omega)} - J(\phi_2)||_{(L^\infty(\Omega))'} = ||\phi_1||_{(L^\infty(\Omega))'} \leq \epsilon/Q$ et $\phi_2 \in L^1(\Omega)$. Or par le cas $p = 1$, $(L^1(\Omega))'' = L^\infty(\Omega)'$ et il contient $L^1(\Omega)$ comme espace fermé isométriquement via J (comme tout espace de Banach est inclus isométriquement comme espace fermé dans son bidual). Comme le résultat précédent indique $\phi \in \overline{L^2(\Omega)}^{(L^1(\Omega))''}$, on déduit $\phi \in J(L^1(\Omega))$ comme voulu. On a donc g tel que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\phi(f) = \int_\Omega gfd\mu$$

Soit donc g l'image dans L^1 de ϕ (on revient au cas général $p \in]1, \infty[$)Or dans le cas d'un espace avec mesure finie, l'équation de la proposition 21 donne : $||\phi||_{(L^p)'} = \sup\{|\phi(x)|, ||x||_p \leq 1, x \in L^\infty\} = \sup\{|\int gxd\mu|, ||x||_p \leq 1, x \in L^\infty\} = ||g||_q$

On déduit donc $g \in L^q$ comme on voulait et $\phi = T(g)$ (en étendant la relation depuis$L^\infty(\Omega)$ par densité dans $L^p(\Omega)$.

(3)**cas** $1 < p < \infty$ **et** μ σ**-fini.** Soit $\phi \in (L^p(\Omega, \mu))'$, il faut montrer qu'elle vient d'un élément de $L^q(\Omega, \mu)$. On pose $\phi_n(f) = \phi(f 1_{A_n})$ pour $f \in L^p(A_n, \mu) \subset L^p(\Omega, \mu)$. Par le cas précédent, il existe $g_n \in L^q(A_n, \mu)$ tel que

$$\forall f \in L^p(A_n, \mu), \quad \int g_n f d\mu = \phi(f 1_{A_n}).$$

$$||g_n||_q = \sup\{|\phi(f 1_{A_n})| \, ; ||f||_p \leq 1, f \in L^\infty(A_n, \mu)\} \leq ||\phi||_{(L^p)'} < \infty.$$

Or par unicité dans le cas (2) et vu les A_n croissant pour $n > m$, $g_n 1_{A_m} = g_m$ et donc $|g_n|$ est croissant et $g = \sup |g_n|$ vérifie par convergence monotone $||g||_q \leq ||\phi||_{(L^p)'}$, vu $|g_n| \leq |g|$ et comme $g_n \to g$ p.s., on déduit par convergence dominée $||g_n - g||_q \to 0$ et en passant à la limite $g_n = g 1_{A_n}$.

Or $f 1_{A_n} \to f$ dans L^p et donc par continuité la relation $\phi(f 1_{A_n}) = T(g)(f 1_{A_n})$ devient $\phi(f) = T(g)(f)$ pour tout $f \in L^p$ donc $\phi = T(g)$.

■

1.1 Théorème de Radon-Nikodym (facultatif)

Nous expliquons un théorème de théorie de la mesure qui permet de dire quand une mesure provient d'une densité dans $L^1(\Omega, \mu)$. On en déduira au chapitre suivant une application à un théorème de compacité faible dans $L^1(\Omega, \mu)$. On se restreint au cas (Ω, μ) probabilité.

Définition 46. Si μ, ν sont des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{T})$, on dit que μ est absolument continue par rapport à ν et on note $\mu \ll \nu$ si pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\nu(A) = 0$ implique que $\mu(A) = 0$

Définition 47. Si μ, ν sont des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{T})$, on dit que μ admet une densité $h \in L^1(\Omega, \nu)$ par rapport à ν et on note $h = \frac{d\mu}{d\nu}$, si $h \geq 0$ p.s. et pour tout $A \in \mathcal{T}$:

$$\int_\Omega 1_A h d\nu = \mu(A).$$

Les définitions s'étendent aux mesures σ-finies, mais on considère seulement ici le cas de probabilités.

Théorème 118 (de Radon-Nikodym). *Pour toutes mesures de probabilités μ, ν sur $(\Omega, \mathcal{T})$, il y a équivalence entre $\mu \ll \nu$ et l'existence d'une densité $h = \frac{d\mu}{d\nu} \in L^1(\Omega, \nu)$ de μ par rapport à ν, et la densité est alors unique ν-p.s.*

Preuve : Si on a deux densités h, k, $\int_\Omega 1_A (h - k) d\nu = 0$ pour tout A $\mathcal{T}$ mesurable, donc par la construction de l'intégrale aussi $\int_\Omega f h d\nu = \int_\Omega f k d\nu$ d'abord pour f mesurable positive (par TCM) puis pour f mesurable bornée donc par dualité $h - k = 0$ dans $L^1(\Omega, \nu)$ donc ν-p.s.

De plus, si on a existence d'une densité et si $\nu(A) = 0$, par TCM, $\int_\Omega 1_A h = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega 1_A (h \wedge n) = 0$ car $| \int_\Omega 1_A (h \wedge n) d\nu| \leq ||(h \wedge n)|||_2 ||1_A||_2 \leq n \nu(A)^{1/2} = 0$ par Cauchy-Schwartz. Donc $\mu(A) = 0$ c'est à dire on a montré $\mu \ll \nu$.

La partie difficile est l'existence d'une densité si $\mu \ll \nu$. On va utiliser le théorème de représentation de Riesz (ou sa variante pour la dualité de L^1, le théorème 117). Soit $\mu_\alpha = \mu + \alpha \nu$ avec $\alpha > 0$. L'idée est simple on s'attend à avoir une densité $\frac{d\mu_\alpha}{d\nu} = \alpha + h$ strictement positive et donc $\frac{d\nu}{d\mu_\alpha} = \frac{1}{\alpha + h}$ bornée par $1/\alpha$ donc dans L^2 ensuite $\alpha(1 - \frac{\alpha}{\alpha + h}) = \alpha \frac{h}{\alpha + h} \to_{\alpha \to \infty} h$ et on devrait pouvoir retrouver h ainsi.

Appliquons cette idée, si $f \in L^1(\Omega, d\mu_\alpha)$, on a

$$\int |f| d\nu = \frac{1}{\alpha} \int |f| d\alpha\nu \leq \frac{1}{\alpha} \int |f| d\mu_\alpha$$

Donc $f \in L^1(\Omega, d\nu)$ et $f \mapsto \int f d\nu$ définit une forme linéaire continue sur $L^1(\Omega, d\mu_\alpha)$, donc par le théorème 117, il existe $h_\alpha \in L^\infty(\Omega, d\mu_\alpha)$ telle que pour tout $f \in L^1(\Omega, d\mu_\alpha)$ on a

$$\int f d\nu = \int f h_\alpha d\mu_\alpha.$$

Et de plus, on a $||h_\alpha||_{L^\infty(\mu_\alpha)} \leq 1/\alpha$. Si $f = 1_{\{h_\alpha < 0\}}$, on obtient $\int \max(0, h_\alpha) d\mu_\alpha \geq 0$ donc vaut 0, donc

$$\nu(\{h_\alpha < 0\}) \leq \frac{1}{\alpha} \mu_\alpha(\{h_\alpha < 0\}) = 0$$

donc $h_\alpha \geq 0$, ν p.s.

On montre maintenant la monotonie attendue pour h_α (si on veut qu'elle soit égale à un $\frac{1}{\alpha+h}$) Si $\beta > \alpha$, on a pour f positive bornée en utilisant $\mu_\alpha(g) \leq \mu_\beta(g)$ pour g positive ν-p.s,

$$\int f h_\beta d\mu_\beta = \int f d\nu = \int f h_\alpha d\mu_\alpha \leq \int f h_\alpha d\mu_\beta$$

car $f h_\alpha$ positive ν-p.s. par le résultat précédent, donc comme c'est valable pour tout $f \geq 0$, on a $h_\beta \leq h_\alpha \mu_\beta$-p.s. donc ν-p.s.

Finalement, on a l'identité

$$\int f d\mu = \int f d\mu_\alpha - \int f \alpha d\nu = \int f(1 - \alpha h_\alpha) d\mu_\alpha = \int f \alpha (1 - \alpha h_\alpha) d\nu + \int f(1 - \alpha h_\alpha) d\mu.$$

Par $||h_\alpha||_{L^\infty(\mu_\alpha)} \leq 1/\alpha$. on a $1 - \alpha h_\alpha \geq 0$ μ_α-p.s. donc ν-p.s. En raisonnant comme avant on obtient $(1 - \alpha h_\alpha) \geq (1 - \beta h_\beta)$ ν-p.s. Donc, par l'égalité précédente (toujours pour f positive en utilisant la croissance de $\alpha \to \alpha h_\alpha$ ν-p.s. par ce qu'on vient de voir donc μ-p.s. par l'hypothèse $\mu \ll \nu$) :

$$\int f \alpha (1 - \alpha h_\alpha) d\nu = \int f \alpha h_\alpha d\mu \leq \int f \beta h_\beta d\mu = \int f \beta (1 - \beta h_\beta) d\nu$$

soit $\alpha(1 - \alpha h_\alpha) \leq \beta(1 - \beta h_\beta)$, ν-p.s. donc converge vers un h en croissant et par convergence monotone et l'égalité avant on obtient

$$\int f h d\nu = \lim_{\alpha \to \infty} \int f \alpha (1 - \alpha h_\alpha) d\nu = \lim_{\alpha \to \infty} \int f d\mu - \int f(1 - \alpha h_\alpha) d\mu \leq \int f d\mu.$$

Donc pour $f = 1$ on trouve $h \in L^1(\Omega, d\nu)$. Or par la monotonie de la limite définissant h, on a

$$(1 - \alpha h_\alpha) = \frac{\alpha(1 - \alpha h_\alpha)}{\alpha} \leq \frac{h}{\alpha} \to_{\alpha \to \infty} 0$$

ν-p.s. puisque h est fini ν-p.s. donc en utilisant encore l'hypothèse, aussi μ-p.s. Comme on a vu la monotonie en α par convergence monotone, on déduit $\int f(1 - \alpha h_\alpha) d\mu \to 0$ et donc finalement l'égalité attendue qui conclut la preuve :

$$\int f h d\nu = \lim_{\alpha \to \infty} \int f d\mu - \int f(1 - \alpha h_\alpha) d\mu = \int f d\mu.$$

■

2 Résumé des propriétés principales

SOit $(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ espace mesuré σ-fini (infini) et $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné, K compact de $\mathbb{R}^n$

- $L^1(\Omega, \mu, \mathcal{T})$: si $\mathcal{T}$ dénombrablement engendré (ou cas $\mathbb{R}^n$) séparable, non-réflexif, dual $L^\infty(\Omega, \mu, \mathcal{T})$
- $L^p(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ $1 < p < \infty$: si $\mathcal{T}$ dénombrablement engendré (ou cas $\mathbb{R}^n$) séparable, réflexif, dual $L^q(\Omega, \mu, \mathcal{T})$
- $L^\infty(\Omega, \mu, \mathcal{T})$: non-séparable, si $\mathcal{T}$ dénombrablement engendré préfaiblement séparable, non-réflexif, dual compliqué qui contient strictement $L^1(\Omega, \mu, \mathcal{T})$
- $W^{m,1}(U)$: séparable par sous-espace ou densité $C_c^\infty(\Omega)$, non-réflexif
- $W^{m,p}(U)$ $1 < p < \infty$: séparable par sous-espace ou densité $C_c^\infty(U)$, réflexif.
- $C^{0,\alpha}(U)$ $\alpha \in]0, 1]$ non-séparable, non-réflexif.
- $C_b^0(U)$ non-séparable, non-réflexif (contient une copie isométrique de $\ell^\infty(\mathbb{N})$).
- $C^0(K)$ séparable par le théorème d'approximation de Weierstrass, non-réflexif (si K non fini contient une copie isométrique de $c_0(\mathbb{N})$ non-réflexif.).

Exercice 8. Soit $x_n \in K \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente vers $x_n \to x \in K$ avec $d(x_n, x_j) > 0$ pour $n \neq j$ Choisir par Tietze des fonctions f_n avec $f_n(x_j) = 1_{n=j}$ à support disjoint borné par 1. Montrer que $F : c_0(\mathbb{N}) \to C^0(K)$ avec $F(c_n) = \sum c_n f_n$ est une isométrie, en déduire que $C^0(K)$ n'est ni réflexif ni séparable.

Exercice 9. Soit $x_n \in U \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente vers $x_n \to x \in U^c$ avec $d(x_n, x_j) > 0$ pour $n \neq j$. Choisir par Tietze des fonctions f_n avec $f_n(x_j) = 1_{n=j}$ à support disjoint borné par 1. Montrer que $F : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to C_b^0(U)$ avec $F(c_n) = \sum c_n f_n$ est une isométrie, en déduire que $C_b^0(U)$ n'est ni réflexif ni séparable.

Exercice 10. En utilisant un exercice de TD, Montrer que l'on a une inclusion isométrique $C^{0,\alpha}(]a, b[) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$.

1. Trouver $u_n \in]a, b[$ $u_n \to b$ strictement croissante avec $\sum (u_{n+1} - u_n)^\alpha < \infty$ (utiliser une suite géométrique pour la construire).
2. Soit $f_n(t) = 1_{[u_n, b[}(t)((t \wedge u_{n+1} - u_n)^\alpha$
3. Soit $A : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to C^{0,\alpha}(]a, b[)$ $A : (a_n) \mapsto (t \mapsto \sum_{i=1}^\infty a_n(1_{[u_n, b[}(t)((t \wedge u_{n+1} - u_n)^\alpha)$, Montrer que A est bien définie.
4. Montrer que $||A(a_n)||_{C^{0,\alpha}(]a,b[)} \geq ||(a_n)||_\infty$ en déduire que $C^{0,\alpha}(]a, b[)$ n'est pas séparable.

Le calcul des duaux des derniers espaces est plus compliqué car ce ne sont pas des espaces de fonctions, cela nécessite la théorie des distributions de Laurent Schwartz (semestre 2). Dans le cas de C^0 on donne une description dans la prochaine section.

3 Mesures de Radon

Exemple 43. L'ensemble des mesures complexes régulières $\mathcal{M}(X)$ (parties réelle et imaginaire sont des mesures signées) sur la tribu des boréliens d'un espace métrique X localement compact et séparable. C'est un espace de Banach avec la norme

$$||\mu|| = |\operatorname{Re}(\mu)|(X) + |\Im(\mu)|(X)$$

avec pour une mesure signée $\mu = \mu_+ - \mu_-$ l'unique décomposition de Jordan comme différence de mesures positives à support disjoint (cf. th 6.14 du cours d'analyse réelle et complexe de Walter Rudin, il existe donc deux A, B mesurables disjoints $A \cup B = X$ et $\mu_+(E) = \mu(A \cap E), \mu_-(E) = -\mu(B \cap E))$, et

$$|\mu| = \mu_+ + \mu_-.$$

μ est dite régulière si pour tout compact $|\mu|(K) < \infty$ et pour tout borélien A

$$|\mu|(A) = \inf\{|\mu|(V), V \supset A \text{ } ouvert\}$$

et pour tout borélien A

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu|(K), K \subset A \text{ } compact\}.$$

Le théorème (admis ici car relevant de la théorie de la mesure) de Radon-Riesz identifie ceci à un dual. Soit $C_c^0(X, \mathbb{C})$ les fonctions continues complexes de X à supports compacts (nulles en dehors d'un ouvert d'adhérence compact). On le munie de la norme $[[.||_\infty$ de la convergence uniforme. On a le résultat suivant (cf Rudin Th 6.19 et Th 3.14)

Théorème 119 (de Radon-Riesz)**.** *Soit X espace métrique localement compact et séparable. $(C_c^0(X, \mathbb{C}))'$ est isométrique à l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des mesures complexes régulières definies sur la tribu des boréliens d'un espace métrique. La bijection $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ donne pour $\Phi \in (C_c^0(X, \mathbb{C}))', f \in C_c^0(X, \mathbb{C})$ la représentation :*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu_\Phi.$$

De plus, $C_c^0(X, \mathbb{C})$ est dense dans $L^1(X, |\mu|)$ pour $\mu \in \mathcal{M}(X)$.