et l'on a

$$d_M^2(x) \;=\; \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle_X|^2\,.$$

2.9 Exercices supplémentaires : Partie 2

Exer. 2.9.1 Soit X un espace vectoriel, et soit $p : X \to [0,\infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \iff x = 0\,;$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \;\; \forall\, x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouver que p est une norme sur X ssi l'ensemble $\{x \in X : p(x) \le 1\}$ est convexe.

Exer. 2.9.2 Soit $a > 0$. On considère les normes suivantes sur $C[0,1]$:

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|\,, \quad \|f\|_1 := a\int_0^1 |f(t)|dt\,.$$

Prouver que la fonction $\|f\| := \min\{\|f\|_\infty, \|f\|_1\}$ est une norme sur $C[0,1]$ ssi $a \le 1$.

Exer. 2.9.3 Soit X un espace vectoriel normé. Quels sont les sous-espaces vectoriels L de X qui contiennent une boule ?

Exer. 2.9.4 Prouver que la partie $P := \{(x_n) : |x_n| < 1 \;\; \forall\, n\}$ est ouverte dans ℓ_2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite (a_n) afin que la partie $\{(x_n) : |x_n| < a_n \;\; \forall\, n\}$ soit ouverte dans ℓ_2.

Exer. 2.9.5 Prouver que $C[\,0{,}1]$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exer. 2.9.6 Pour $1 \le p < \infty$, on pose $G_p := \{(x_n) \in \ell^p : \sum_1^\infty x_n = 0\}$. Montrer que G_p est un sous-espace vectoriel de ℓ^p. Est-ce que G_p est fermé ?

Exer. 2.9.7 Donner un exemple d'une fonction localement lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}$ sur un espace de Hilbert X qui n'est pas minorée sur la boule unité. Une telle fonction peut-elle être convexe ?

Exer. 2.9.8 Soit A une partie bornée dans un espace normé X. Prouver que

$$\text{co}\,\big(\partial A\big) \;\supset\; \text{cl}\;A\,.$$

Exer. 2.9.9 Soit X un espace normé, et soit A une partie ouverte dans X telle que chaque point x de la frontière de A admet un hyperplan d'appui ; c-à-d, il existe $0 \ne \zeta_x \in X^*$ et $c_x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle\,\zeta_x, x\,\rangle \;=\; c_x\,, \;\; \langle\,\zeta_x, u\,\rangle \le c_x \;\; \forall\, u \in A\,.$$

Montrer que A est convexe. Prouver que le résultat reste vrai lorsque l'hypothèse "A est ouverte" est remplacée par "A est fermé et d'intérieur non vide."

Exer. 2.9.10 Soit X un espace normé de dimension finie. Prouver que les topologies forte et faible coincident.

Exer. 2.9.11 Soit $\zeta : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle sur un espace normé X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ζ est continue ;
2. $\mathcal{N}(\zeta)$ est fermé ;
3. $\mathcal{N}(\zeta)$ n'est pas dense dans X ;
4. ζ est bornée sur un voisinage de l'origine ;
5. Il existe $M \geq 0$ tel que $|\zeta x| \leq M\|x\| \ \ \forall\, x \in X$.

Exer. 2.9.12 (Fonctions d'appui) C et D sont des parties non vides dans X, D étant convexe et fermé. On définit la *fonction d'appui* $H_C : X^* \to \,]-\infty, \infty]$ par

$$H_C(\zeta) := \sup_{x \in C} \langle \zeta, x \rangle.$$

1. Montrer que $C \subset D$ si et seulement si $H_C \leq H_D$.
2. Soit S un sous-ensemble non vide et borné de X. Prouver que $C \subset D$ si et seulement si $C + S \subset D + S$.
3. Montrer que l'équivalence est fausse en général si S n'est pas borné, ou si D n'est pas fermé, ou si D n'est pas convexe.

Exer. 2.9.13 (Cônes normaux) Soit C une partie dans X et soit $x \in C$. Le *cône normal* à C en x (au sens de l'analyse convexe) est l'ensemble

$$N_C(x) := \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, x' - x \rangle \leq 0 \ \ \forall\, x' \in C\}.$$

1. Montrer que si C est un convexe d'intérieur non vide, alors $N_C(x) \neq \{0\}$ pour tout $x \in \partial C$.
2. Posons $X := \ell^2$ et $C := \{x \in X : |x_i| \leq 1/i \ \ \forall\, i\}$. Prouver que C est un convexe fermé, que $0 \in \partial C$, mais que $N_C(0) = \{0\}$.
3. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $x \in \partial C$. Montrer que $x \notin \operatorname{int}(\overline{C})$. En déduire qu'en dimension finie, on a toujours $\operatorname{int} C = \operatorname{int} \overline{C}$ quand C est convexe. Montrer comment l'existence d'une forme linéaire non continue fournit un contre-exemple à cette assertion en dimension infinie.
4. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial C$. Montrer que $N_C(x) \neq \{0\}$.
5. Soient C et D deux convexes disjoints de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\zeta \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle \zeta, x \rangle \leq \langle \zeta, y \rangle \quad \forall\, (x, y) \in C \times D.$$

   [Remarque : il s'agit du dernier cas du théorème 2.29.]

Exer. 2.9.14 Soit A une partie convexe dans X, et soit $\alpha \in A$. Prouver que

$$A \subset \alpha + T_A(\alpha), \quad T_A(\alpha) = \text{adh} \left\{ \frac{\alpha' - \alpha}{t} : t > 0, \alpha' \in A \right\}.$$

Exer. 2.9.15 Soient X et E deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(X, E)$. Montrer que si f est continue quand X et E sont munis des topologies usuelles, alors f est continue quand X et E sont munis de leurs topologies faibles.

Exer. 2.9.16 (Mazur) Soit (x_n) une suite dans X qui converge faiblement vers x. On pose $C :=$ co $\{x_n : n = 1, 2 \ldots\}$, l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_n : n \geq 1\}$. Montrer qu'il existe une suite (y_n) dans C telle que $\|y_n - x\|_X \to 0$. (C'est à dire, une suite de combinaisons convexes des x_n converge fortement vers x.)

Exer. 2.9.17 Donner un exemple d'une fonction sci sur un espace de Hilbert qui n'est pas bornée inférieurement sur la boule unité fermée. Et d'une fonction sci qui l'est, mais qui n'atteint pas un minimum sur cette boule.

Exer. 2.9.18 Pour $1 < p < +\infty$, prouver que la norme de $L^p(0,1)$ est dérivable en tout point différent de 0. Qu'en est-il pour $L^1(0,1)$ et $L^\infty(0,1)$?

Exer. 2.9.19 Soit X l'espace vectoriel $L^2(0,1)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, i.e.,

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt,$$

et soit Y l'espace vectoriel $L^2(0,1)$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ usuelle. Montrer que l'application $\Lambda : X \to Y$ définie par $\Lambda x = x$ admet un graphe fermé mais qu'elle n'est pas continue. Que peut-on en déduire sur $(X, \|\cdot\|_1)$? Montrer par cet exemple que la conclusion de l'Exercice 2.73 est fausse si 'espace de Banach' est remplacé par 'espace normé'.

Exer. 2.9.20 Etablir la réciproque de l'exercice 2.9.15 si X et E sont des espaces de Banach. Autrement dit, si f est une application linéaire de X dans E, montrer que la continuité de f pour les topologies faibles de X et E implique la continuité de f pour les topologies fortes de X et E. [Indication : On pourra considérer le graphe de f.]

Exer. 2.9.21 On considère l'espace de Hilbert $X := L^2(-1,1)$. Pour chaque réel α, soit E_α l'ensemble des fonctions continues f sur $[-1,1]$ telles que $f(0) = \alpha$. Montrer que E_α est convexe et dense dans X. En déduire que si $\alpha \neq \beta$, alors E_α et E_β sont des convexes disjoints de X qui ne peuvent être séparés par une forme linéaire continue.

Exer. 2.9.22 On considère deux topologies sur $X := L^\infty(0,1)$: la topologie de la norme usuelle, et la topologie faible* provenant du fait que X « est le dual » de $L^1(0,1)$. Montrer que $C([0,1])$ est dense dans X pour une seule de ces topologies. De même pour "fermé" à la place de "dense".

Exer. 2.9.23 Soit K un compact non vide dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $C(K)$ n'est pas uniformément convexe.
2. Prouver que $C(K)$ est séparable. [Indication : le théorème de Stone-Weierstrass.]

Exer. 2.9.24 Soit X un espace de Banach. On pose $X^{\{0\}} := X$, et par la suite

$$X^{\{n+1\}} := \left(X^{\{n\}}\right)^*, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Par le biais des injections canoniques, on peut considérer que deux suites (croissantes) d'espaces sont obtenues : $X^{\{2n\}}$ et $X^{\{2n+1\}}$ $(n \geq 0)$. Prouver que deux cas de figure existent (seulement) : soit les deux suites sont strictement croissantes, soit les deux suites sont constantes.

Exer. 2.9.25
1. Prouver que c_0^* (voir la définition 2.9) est isométrique à ℓ^1.
2. Prouver que c_0 n'est pas réflexif. Identifier un élément de $(c_0)^{**} \backslash J(c_0)$.

Exer. 2.9.26 Caractériser le dual c^* de c (voir 2.9).

Exer. 2.9.27 (von Neumann) On prend $X := \ell^p, 1 < p < +\infty$, et l'on désigne par e_n l'élément de X dont tous les termes sont nuls à part le n-ième, qui vaut 1.
1. La suite $\{e_n\}$ ne converge pas dans la topologie forte, mais converge faiblement vers 0.
2. On pose $y_{n,m} := e_n + ne_m$. Alors l'ensemble $E := \{y_{n,m} : m > n\}$ est fortement fermé dans X.
3. L'ensemble E admet 0 comme point d'adhérence faible, mais aucune suite dans E converge faiblement vers 0. (L'ensemble de toutes les limites faibles de suites dans E n'est donc pas faiblement fermé.)

Exer. 2.9.28 Soit X l'espace normé ℓ^∞. La partie indépendante dans X consistant des éléments canoniques e_i $(i = 1, 2 \ldots)$ peut être complétée pour obtenir une base vectorielle (algébrique) de l'espace vectoriel. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie comme suit : $f(x) =$ la somme des coordonnées de x par rapport à cette base. Prouver que f n'est pas continue sur X. Est-ce que f est sci ?

Exer. 2.9.29 Donner un exemple d'une application linéaire discontinue $T : X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y tel que $\mathcal{N}(T)$ soit fermé.

Exer. 2.9.30 Soit X un Banach de dimension infinie. Prouver que toute base vectorielle de X est non dénombrable. Montrer que ℓ_c^∞ admet une base dénombrable.

Exer. 2.9.31 Soit X un Banach de dimension infinie. On démontre que l'espace vectoriel topologique $(X, \sigma(X, X^*))$ n'est pas localement dénombrable, ce qui implique que la topologie faible de X n'est pas métrisable. Supposons par l'absurde que la topologie faible admet une base locale dénombrable.
1. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de X^* telle que tout $g \in X^*$ soit une combinaison linéaire finie des f_n. [Indication : L'Exer.2.31]
2. En déduire que dim $X^* < +\infty$ et conclure.
3. Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas l'exercice 2.82 ?

Exer. 2.9.32 Soit X un espace de Banach qui est isométrique à un espace de Banach réflexif Y. Prouver que X est réflexif en utilisant le théorème 2.89.

Exer. 2.9.33 Si $x_n \to x$ faiblement, alors

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Exer.2.9.34 Soit X est un espace de Banach uniformément convexe, et soit (x_n) une suite qui converge faiblement vers x. Prouver que si

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|,$$

alors $x_n \to x$ fortement.

Exer.2.9.35 Pour une partie non vide A dans $\mathbb{R}^2$, et pour $X := L^2(0,1) \times L^2(0,1)$, on définit le sous-ensemble Ω suivant de X :

$$\Omega := \{(f,g) \in X : (f(t), g(t)) \in A \text{ p.p.}\}.$$

Prouver que Ω est fermé ssi A est fermé, que Ω est convexe ssi A est convexe, et que Ω est faiblement compact ssi A est fermé, borné et convexe.

Exer.2.9.36 Soit (f_i) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, et soit $g \in L^p(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega f_i(x)\phi(x)\,dx \to \int_\Omega g(x)\phi(x)\,dx \quad \forall\, \phi \in C_c(\Omega).$$

Prouver que (f_i) converge faiblement vers g dans $L^p(\Omega)$.

Exer.2.9.37 (Un théorème de Banach) Montrer que dans ℓ^1 une suite converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Exer.2.9.38 Prouver que si la suite (x_n) dans un espace normé X converge faiblement, alors elle est bornée. [Indication : proposition 2.61.]

Exer.2.9.39 Soit X l'espace de Banach $C([0,1],\mathbb{R})$ et soit S l'ensemble des éléments $f \in X$ tel que

$$\|f\| \leq 2, \qquad \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = 1.$$

1. Démontrer que S est non vide, borné, convexe et fermé, mais que S ne contient aucun élément de norme minimale. En déduire que X n'est pas réflexif.
2. Adapter l'exemple afin obtenir dans X un sous-espace fermé M et un point $v \in X$ qui n'admet pas de projection sur M.

Exer.2.9.40 Soit X un espace de Banach et M un sous-espace de dimension finie. Prouver que tout $v \in X$ admet une projection sur M.

Exer.2.9.41 On pose

$$f_1(x,y) := \begin{cases} \frac{y^3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}.$$

(a) Montrer que f_1 est dérivable en $(0,0)$ au sens de Gâteaux, mais que f_1 n'est pas continue en $(0,0)$.

(b) Les dérivées partielles de f_2 existent partout, mais f_2 n'est pas dérivable en $(0,0)$ au sens de Gâteaux.

Exer. 2.9.42 Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne en x, et si f est dérivable en x au sens de Gâteaux, alors f est dérivable en x au sens de Fréchet.

Exer. 2.9.43 Soit $v \in X$, et soit (ζ_i) une suite bornée dans X^*. Montrer qu'il existe un point d'adhérence de la suite, et que pour tout point d'adhérence ζ il existe une sous-suite (ζ_{i_n}) tels que $\langle \zeta_{i_n}, v\rangle \to \langle \zeta, v\rangle$.

Exer. 2.9.44 Si $f : X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne en x et dérivable en x au sens de Gâteaux, prouver que $f'_G(x) \in X^*$.

Exer. 2.9.45 Soit X un espace normé, $X \neq \{0\}$.

1. Prouver que la norme n'est pas différentiable au sens de Gâteaux en 0.
2. On suppose que la dérivée de la norme (au sens de Gâteaux) existe en un point x, et on la note ζ. Par des résultats précédents, on déduit $x \neq 0$ et $\zeta \in X^*$. Prouver que $\|\zeta\|_* = 1$ et $\langle \zeta, x\rangle = \|x\|$.
3. Montrer que la norme est Gâteaux dérivable en $x \neq 0$ ssi il existe un seul élément $\zeta \in X^*$ de norme égale à 1 qui satisfait $\langle \zeta, x\rangle = \|x\|$.

[Indication : les exercices 2.9.44 et 2.9.43 peuvent servir.]

Exer. 2.9.46 Soit A une partie dans un espace normé X, et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rang K. Prouver qu'il existe une fonction $F : X \to \mathbb{R}$ qui prolonge f et qui reste lipschitzienne de rang K. [Indication : considérer $\inf_{y\in A}\{f(y) + K\|x-y\|\}$.]

Exer. 2.9.47
1. Soit X un espace de Hilbert, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \|x\|^2$. Calculer $f'(x; h)$.
2. Prouver que dans un espace de Hilbert, la norme est dérivable en tout point différent de 0.

Exer. 2.9.48 Identifier les points où la norme sur $C[0,1]$ est dérivable.

Exer. 2.9.49 Construire une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $f'(0; 1)$ n'existe pas.

Exer. 2.9.50 Montrer que la fonction $f(x,y) = (1+x^2)(1+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$ est strictement convexe en x (pour chaque y), et strictement convexe en y (pour chaque x). Est-ce que f est convexe ?

Exer. 2.9.51 Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{+\infty}$ est convexe sci et si $f(u) \to +\infty$ quand $|u| \to +\infty$, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$f(u) \geq \alpha|u| - \beta \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n.$$

Exer. 2.9.52 Si $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, et si $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors la fonction $f(x) := \theta\big(h(x)\big)$ est convexe.

Exer.2.9.53 On dit qu'une fonction f est *concave* lorsque $-f$ est convexe. Montrer que $x \mapsto \ln x$ est concave sur le domaine $x > 0$. En déduire l'inégalité suivante entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \;\leq\; \frac{1}{n} \sum_1^n a_i \quad (a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n).$$

Exer.2.9.54

1. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et strictement positive. Alors $g := \ln f$ est convexe ssi
$$f(x) f''(x) \geq \left[f'(x)\right]^2 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
2. Soit a_k et b_k strictement positifs $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Alors la fonction
$$g(x) \;:=\; \ln \left\{ \sum_1^n a_k^{1+x}\, b_k^{1-x} \right\}$$
est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction
$$h(x) \;:=\; \left\{ \sum_1^n a_k^{1+x}\, b_k^{1-x} \right\} \left\{ \sum_1^n a_k^{1-x}\, b_k^{1+x} \right\}$$
est convexe sur $\mathbb{R}$. [Indication : l'exercice 2.9.52 pourra servir.]
4. h atteint un minimum global en $x = 0$.
5. Déduire l'inégalité Cauchy-Schwarz :
$$\left\{ \sum_1^n a_k b_k \right\}^2 \;\leq\; \left\{ \sum_1^n a_k^2 \right\} \left\{ \sum_1^n b_k^2 \right\}.$$

Exer.2.9.55 Soit $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction convexe telle que $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$, où X, Y sont deux espaces vectoriels. Si, pour tout $x \in X$,

$$g(x) := \inf_{y \in Y} f(x, y) > -\infty,$$

alors g est convexe et $\operatorname{dom} g \neq \emptyset$. En déduire que si A est un ensemble convexe non vide dans un espace normé X, alors la fonction distance $d_A(\cdot)$ est convexe.

Exer.2.9.56

1. Soit C une partie fermée dans X telle que
$$x, y \in C \Longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C.$$
Prouver que C est convexe.
2. Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction sci telle que
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \;\; \forall\, x, y \in X.$$
Prouver que f est convexe.

Exer. 2.9.57 Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable telle que, pour certaines constantes positives a et b, l'on ait

$$0 \le f(x) \le a + b|x|^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Identifier des constantes c et d telles que

$$|f'(x)| \le c + d|x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exer. 2.9.58 Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction, et soit x un point dans dom f. Un élément ζ dans X^* est un *sous-gradient* de f en x (au sens de l'analyse convexe) s'il satisfait

$$f(y) - f(x) \;\ge\; \langle \zeta, y - x\rangle \;\; \forall\, y \in X.$$

L'ensemble de tous les sous-gradients de f en x est désigné par $\partial f(x)$, le *sous-différentiel* de f en x. Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction et $x \in$ dom f. Prouver que si f est convexe, alors en tout point x de continuité de f, le sous-différentiel $\partial f(x)$ est non vide et faiblement* compact.

Exer. 2.9.59 (Jensen) Soit $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Prouver *l'inégalité de Jensen* :

$$\phi\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \le \int_0^1 \phi(f(t))\,dt \quad \forall\, f \in L^1(\,]0,1[\,,\mathbb{R}^k).$$

   [Indication : utiliser l'exercice 2.9.58.]

2. Que devient l'inégalité quand l'intervalle sous-jacent est $[a,b]$ plutôt que $[0,1]$?
3. Formuler et prouver l'inégalité de Jensen en plusieurs dimensions, lorsque les fonctions f appartiennent à $L^1(\Omega,\mathbb{R}^k)$, Ω étant une partie dans $\mathbb{R}^n$ qui est ouverte, convexe et bornée.

Exer. 2.9.60 (Stampacchia) Soient X un espace de Banach et $q : X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour chaque $(u,v) \in X \times X$, les applications $v' \mapsto q(u,v')$ et $u' \mapsto q(u',v)$ appartiennent à X^* (donc $q(u,v)$ est *bilinéaire* : linéaire et continue séparément par rapport à ses deux variables). L'exercice suivant obtient un théorème fondamental de Stampacchia sur les inégalités variationnelles.

(1) Prouver l'existence de M tel que $|q(u,v)| \le M\|u\|\|v\|\;\;\forall\,(u,v) \in X \times X$.

(2) Prouver que la fonction $f(x) := q(x,x)$ admet une dérivée $f'_G(x)$ au sens de Gâteaux en tout point x, et exprimer la dérivée directionnelle $f'(x;v) = \langle f'_G(x), v\rangle$ en termes de q.

On suppose par la suite que la forme bilinéaire q est *symétrique* :

$$q(u,v) = q(v,u) \;\; \forall\,(u,v) \in X \times X,$$

ainsi que *coercive* : il existe $c > 0$ tel que

$$f(x) = q(x,x) \ge c\|x\|^2 \;\; \forall\, x \in X.$$

(3) Montrer que la fonction f est strictement convexe.

(4) En déduire que f est continue (justifier en citant un théorème du cours).

On suppose maintenant que X est réflexif. On se donne une partie convexe fermée non vide K dans X ainsi qu'un élément $\zeta \in X^*$.

(5) Prouver l'existence d'un point x_* unique qui minimise sur K la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - \langle \zeta, x \rangle$.

(6) En déduire que x_* satisfait la condition nécessaire $-\frac{1}{2}f'_G(x_*) + \zeta \in N_K(x_*)$, ce qui équivaut à *l'inégalité variationnelle* suivante :

$$q(x_*, v - x_*) \geq \langle \zeta, v - x_* \rangle \quad \forall\, v \in K.$$

(7) Prouver que x_* est l'unique solution de l'inégalité variationnelle ci-dessus.

Exer. 2.9.61 (Compacité faible dans $\mathbf{L^1(\Omega)}$) Soit $k(\cdot) \in L^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. On pose $X := L^\infty(\Omega)$ muni de sa topologie faible* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$, et $Y := L^1(\Omega)$ muni de sa topologie faible $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$.

1. Quelles sont les formes linéaires continues sur X ?
2. On définit $\Lambda : X \to Y$ par $\Lambda f = kf$. Prouver que l'application linéaire Λ est continue.

On considère maintenant

$$K := \left\{ f \in L^1(\Omega) : |f(x)| \leq k(x) \text{ p.p. } x \in \Omega \right\}.$$

3. Prouver que K est faiblement compact dans $L^1(\Omega)$.
4. Prouver que K est séquentiellement faiblement compact dans $L^1(\Omega)$.

Soit $F(x)$ une partie convexe fermée dans $\mathbb{R}$ pour chaque $x \in \Omega$, où

$$|v| \leq k(x) \;\; \forall\, v \in F(x) \;\; \forall\, x \in \Omega.$$

On pose

$$\Phi \;:=\; \left\{ f \in L^1(\Omega) : f(x) \in F(x) \text{ p.p. } x \in \Omega \right\}.$$

5. Prouver que Φ est faiblement compact dans $L^1(\Omega)$.