Université Claude Bernard | Master 1 Général
Année universitaire 2017-2018 | Analyse

Devoir Maison pour le mercredi 8 novembre
Fonctions à variation bornée.

Soit $B_b([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées muni de $||.||_\infty$. On définit

$$BV([0,1]) = \{f \in B_b([0,1],\mathbb{R}) : \exists C < \infty \forall n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1 \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant C\}.$$

C'est l'espace des fonctions à variation bornée munie de la norme :

$$||f||_{BV} = |f(0)| + \inf\{C : \forall n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1 \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant C\}$$

1. Montrer que $BV([0,1])$ est un espace de Banach réel muni de la norme $|| \cdot ||_{BV}$.
2. Montrer que $BV([0,1]) \subset B_b([0,1],\mathbb{R})$ est une inclusion continue.
3. Montrer que $BV([0,1]) \cap C^0([0,1]) \subset C^0([0,1])$ est dense dans $C^0([0,1])$ pour la topologie de la norme $||.||_\infty$ (du cours).
4. Soit $\delta_p : BV([0,1]) \to \mathbb{R}, p \in [0,1]$ défini par $\delta_p(f) = f(p)$. Montrer que δ_p est linéaire continue et $|||\delta_p||| = 1$.
5. Soit $f \in BV([0,1])$ montrer que $\{x : |f(x) - \limsup_{\epsilon \to 0^+} f(x+\epsilon)| \geqslant 1/n\}$ est fini et en déduire que f a au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.
6. Soit $g \in C_b^1([0,1]), f \in BV([0,1])$, on pose :

   $$\Phi(g)(f) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 g'(s)f(s)ds.$$

   Montrer que Φ est bien définie et :

   $$|\Phi(g)(f)| \leqslant ||g||_\infty(||f||_{BV} - |f(0)|)$$

7. Montrer que $\Phi_1 : (C_b^1([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R}) \to (BV([0,1]))'$ défini par $\Phi_1(g,\lambda)(f) = \Phi(g)(f) + \lambda f(0)$ est linéaire continue et s'étend en une unique application linéaire continue $\phi : C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R} \to (BV([0,1]))'$. (on rappelle que $||(x,y)||_{E\oplus^\infty\mathbb{R}} = \max(||x||,|y|)$). Vérifier que la norme subordonnée est bornée par 1 : $|||\phi||| \leqslant 1$.
8. On rappelle que $W^{1,1}(]0,1[)$ est l'espace de sobolev vu en cours. Montrer qu'il existe $I : f \in W^{1,1}(]0,1[) \to C^0([0,1])$ injectif avec $I(f)(x) = C(f) + \int_0^x f'(t)dt$ tel que $I(f) = fp.p$ et avec $f' \in L^1(]0,1[)$ la dérivée de $W^{1,1}(]0,1[)$. Montrer que $ImI \subset BV([0,1])$ est fermé et que I induit une application qu'on appelle encore $I : W^{1,1}(]0,1[) \to BV([0,1])$ continue tel que $||f||_{W^{1,1}} \leqslant 2||I(f)||_{BV}$.
9. Montrer que pour $(f,t) \in C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R}, g \in W^{1,1}(]0,1[)$

   $$[I^t \circ \phi(f,t)](g) = \int_0^1 g'(s)f(s)ds + tC(g).$$

10. Déduire que $I^t \circ \phi$ injective.
11. Soit $f \in L^\infty([0,1], Leb)$ et $\psi_f(g) = \int_0^1 g'(s)f(s)ds$, montrer en utilisant le théorème de prolongement de Hahn-Banach que $\psi_f \in Im(I^t)$. En déduire que ϕ n'est pas surjective. Obtenir la même conclusion sans Hahn-Banach.