Devoir Maison pour le mercredi 8 novembre

Fonctions à variation bornée et absolument continues.

On définit l'espace des fonctions à variation bornée :

$$BV([0,1]) = \{f \in B_b([0,1]) : \exists C < \infty \forall n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1 \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant C\}.$$

On appelle l'infimum des constantes de la définition :

$$||f||_{BV} = |f(0)| + \inf\{C : \forall n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1 \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant C\}$$

1. Montrons que $BV([0,1])$ est un espace vectoriel normé. On voit que c'est un **sous-espace vectoriel** de $B_b([0,1])$. $\sum_{i=1}^{n} |\lambda f(t_i) - \lambda f(t_{i-1})| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$ et

$$||\lambda f||_{BV} = |\lambda f(0)| + \inf\{|\lambda| C : \forall n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1 \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant C\} = |\lambda| \, ||f||_{BV},$$

donc $BV([0,1])$ est stable par multiplication par un scalaire. De plus il est stable par somme car par l'inégalité triangulaire des nombres : $\sum_{i=1}^{n} |(f+g)(t_i) - (f+g)(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant C_f + C_g < \infty$ si C_f, C_g sont dans l'ensemble dont on prend l'inf, donc :

$$||f+g||_{BV} \leqslant |(f+g)(0)| + C_f + C_g \leqslant |f(0)| + |g(0)| + C_f + C_g,$$

soit en passant à l'infimum $||f+g||_{BV} \leqslant ||f||_{BV} + ||g||_{BV}$ soit l'inégalité triangulaire. Pour voir la séparation noter en prenant la subdivision $\{0, s, 1\}$ que $|f(s)| \leqslant |f(0)| + |f(s) - f(0)| + |f(1) - f(s)| \leqslant ||f||_{BV}$ donc $f = 0$ si $||f||_{BV} = 0$. En fait, on vient de voir $||f||_\infty \leqslant ||f||_{BV}$.
Voyons la complétude : On prend une suite de Cauchy f_n dans BV, par l'inégalité précédente, elle de Cauchy pour la convergence uniforme, donc comme on a vu en cours que l'espace des fonctions bornées est complet, elle converge dans cet ensemble, et la limite uniforme est alors Borélienne, d'où convergence dans $B_b([0,1])$. Il faut voir que la limite est dans BV et la convergence pour la norme BV.
Soit $n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1$ on sait que pour $k, m \geqslant N$

$$|f_k - f_m|(0) + \sum_{i=1}^{n} |(f_k - f_m)(t_i) - (f_k - f_m)(t_{i-1})| \leqslant \epsilon$$

soit en faisant $m \to \infty$ en utilisant la limite uniforme

$$|f_k - f|(0) + \sum_{i=1}^{n} |(f_k - f)(t_i) - (f_k - f)(t_{i-1})| \leqslant \epsilon$$

donc, comme la borne ne dépend pas de la suite des temps, on trouve à la fois $f_k - f \in BV$ (donc $f \in BV$ par linéarité) et $||f_k - f||_{BV} \leqslant \epsilon$ ce qui donne la convergence voulue dans BV.

2. On a vu au 1 que $||f||_\infty \leqslant ||f||_{BV}$. Donc l'inclusion de BV dans $B_b([0,1])$ qui est clairement linéaire est bornée sur la boule unité donc continue.
3. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, les polynÃ´mes sont denses dans $C^0([0,1])$. IL suffit donc de voir qu'ils sont inclus dans BV pour obtenir la densité voulue. Or un polynÃ´me P est C^1 donc sa dérivée est bornée sur [0,1](par Heine car continue sur un compact) disons par M, donc P est M-lipschitzien par l'inégalité des accroissements finies. POur une subdivision : $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1$ on borne : $\sum_{i=1}^n |P(t_i) - P(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^n M|t_i - t_{i-1}| \leqslant M$. Donc $P \in BV$ et $||P||_B V \leqslant M$.
4. Soit $\delta_p : BV([0,1]) \to \mathbb{R}, p \in X$ défini par $\delta_p(f) = f(p)$. Montrons que δ_p est linéaire continue et $|||\delta_p||| = 1$. Déjà la linéarité vient de celle de l'évaluation sur $C^0([0,1])$. On voit la bornitude sur la norme unité. $|f(p)| \leqslant ||f||_{BV}$ par la question 2, ce qui conclut à la continuité et $|||\delta_p||| \leqslant 1$. Enfin $||1||_{BV} = 1 + 0$ (car toutes différences $1(t) - 1(s) = 0$) et $\delta_p(f) = f(p) = 1 = ||1||_{BV}$ donc le sup est atteint et $|||\delta_p||| \geqslant 1$.
5. Montrons d'abord que $\forall n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1$

$$\sum_{i=1}^n \sup_{s \in [t_{i-1}, t_i]} |f(s) - f(t_{i-1})| \leqslant ||f||_{BV}$$

D'abord notons que la somme vaut :

$$\sum_{i=1}^n \sup_{s_i \in [t_{i-1}, t_i]} |f(s_i) - f(t_{i-1})| = \sup_{(s_1, \ldots s_n) : s_i \in [t_{i-1}, t_i]} \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_{i-1})|$$

Or $\{0, t_1, s_1, t_2, ..., s_{n-1}, t_n\}$ est une subdivision donc

$$\sup_{(s_1, \ldots s_n) : s_i \in [t_{i-1}, t_i]} \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sup_{s : s_i \in [t_{i-1}, t_i]} \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| + |f(s_i) - f(t_{i-1})| \leqslant ||f||_{BV} - |f(0)|.$$

Cela donne l'affirmation En conséquence :

$$\sum_{i=1}^n \limsup_{\epsilon \to 0^+} |f(t_{i-1} + \epsilon) - f(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^n \sup_{s \in [t_{i-1}, t_i]} |f(s) - f(t_{i-1})| \leqslant ||f||_{BV}$$

Soit $A_n(f) = \{x : |f(x) - \limsup_{\epsilon \to 0^+} f(x + \epsilon)| \geqslant 1/n\}$ On déduit en prenant chaque t_i dans $A_n(f)$ que

$$Card A_n(f) \frac{1}{n} \leqslant ||f||_{BV}$$

donc $Card A_n(f) \leqslant n||f||_{BV}$ est bien fini.

Les points de discontinuité peuvent Ãªtre à droite ou a gauche (point de discontinuité de $f(-\cdot)$) il peut aussi Ãªtre par dessus, ou par dessous (lim inf différente de la valeur au point).

L'ensemble D des points de discontinuité s'écrit donc comme l'union :

$$D = \cup_{n \geqslant 1} \Big(A_n(f) \cup A_n(-f) \cup A_n(f(-\cdot)) \cup A_n(-f(-\cdot)) \Big)$$

qui est donc dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis (puisque toutes les fonctions en questions sont dans BV).

6. Soit $g \in C^1_b([0,1])$, $f \in BV([0,1])$, on pose pour $s \leqslant t$:

$$\Phi_{s,t}(g)(f) = f(t)g(t) - f(s)g(s) - \int_s^t g'(u)f(u)du.$$

C'est bien définie car $g'f$ est borélienne bornée (par produit car g' est mÃªme une fonction continue bornée) donc l'intégrale de Lebesgue existe et par Chasles et somme télescopique :

$$\Phi_{0,1}(g)(f) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{t_{i-1},t_i}(g)(f).$$

On fait une décomposition en somme sur une subdivision pour pouvoir exploité les petits pas de subdivision.
Mais on peut borner chaque terme :

$$\begin{aligned}|\Phi_{s,t}(g)(f)| &\leqslant |f(t)g(t) - f(s)g(s) - \int_s^t g'(u)du f(s)| + \int_s^t |g'(u)||f(u) - f(s)|du \\ &= |f(t) - f(s)||g(t)| + ||g'||_\infty \int_s^t |f(u) - f(s)|du.\end{aligned}$$

En prenant la somme et en notant $i(u) = \max\{i, t_i \leqslant u\}$:

$$\begin{aligned}|\Phi_{0,1}(g)(f)| &\leqslant ||g||_\infty \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} ||g'||_\infty \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(u) - f(t_{i(u)})|du \\ &\leqslant ||g||_\infty(||f||_{BV} - |f(0)|) + ||g'||_\infty \int_0^1 |f(u) - f(t_{i(u)})|du.\end{aligned}$$

On considère la subdivision i/n et on note $i_n(u) = \max\{i, i/n \leqslant u\}$ Alors $i_n(u)/n \to u$ et en dehors de l'ensemble dénombrable de points de discontinuité de f, $|f(u) - f(i_n(u)/n)| \to 0$ donc par convergence dominée par $2||f||_\infty$, $\int_0^1 |f(u)-f(i_n(u)/n)|du \to_{n\to\infty} 0$ d'où

$$\begin{aligned}|\Phi_{0,1}(g)(f)| &\leqslant |||g||_\infty(||f||_{BV} - |f(0)|) + ||g'||_\infty \int_0^1 |f(u) - f(i_n(u)/n)|du \\ &\to_{n\to\infty} ||g||_\infty(||f||_{BV} - |f(0)|).\end{aligned}$$

d'où le résultat.

7. Montrons $\Phi_1 : (C^1_b([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R}) \to (BV([0,1]))'$ défini par $\Phi_1(g,\lambda)(f) = \Phi(g)(f) + \lambda f(0)$ est linéaire continue et s'étend en une unique application linéaire continue ϕ : $C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R} \to (BV([0,1]))'$. (on rappelle que $||(x,y)||_{E\oplus^\infty\mathbb{R}} = \max(||x||, |y|)$) et que la norme subordonnée vérifie : $|||\phi||| \leqslant 1$.
en effet par question précédente :

$$|\Phi_1(g,\lambda)(f)| = |\Phi(g)(f)+\lambda f(0)| \leqslant ||g||_\infty(||f||_{BV}-|f(0)|)+|\lambda||f(0)| \leqslant \max(||g||_\infty, |\lambda|)||f||_{BV}$$

Or $||g||_\infty \leqslant ||g||_{C^1}$ donc la première continuité est évidente car la linéarité l'est aussi par linéarité de l'intégrale.
Mais en regardant la norme induite de $C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R}$ on a mÃªme continuité de Φ_1 et $||\Phi_1(g,\lambda)||_{BV'} \leqslant \max(||g||_\infty, |\lambda|)$ donc $|||\Phi_1||| \leqslant 1$ et comme $C^1_b([0,1])$ est dense (en conséquence du thm d'approximation de Weierstrass) et que BV' est complet comme tout dual, on déduit par extension des applications uniformément continue par densité (chap 0) que Φ_1 s'étend en ϕ et que $|||\phi||| \leqslant 1$.

8. On rappelle que $W^{1,1}(]0,1[)$ est l'espace de sobolev vu en cours. Montrer qu'il existe $I : f \in W^{1,1}(]0,1[) \to C^0([0,1])$ injectif avec $I(f)(x) = C(f) + \int_0^x f'(t)dt$ tel que $I(f) = f p.p$ (c'est pareil que le cours pour H^1 mais cela ne s'en déduit pas, cf cours de l'an dernier qui faisait tous les $W^{1,p}$).

   Montrons que $AC([0,1]) := ImI \subset BV([0,1])$ est fermé et induit $I : W^{1,1}(]0,1[) \to BV([0,1])$ continue. ON commence par l'inclusion et la continuité, en effet pour $f \in Im(I) : n, 0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant 1$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(s)|ds \leqslant ||f||_{W^{1,1}}$$

   donc f est bien à variation borné et comme

$$|f(0)| \leqslant \int_0^1 |f(s)|ds + \int_0^1 |f(s) - f(0)|ds \leqslant \int_0^1 |f(s)|ds + \int_0^1 \int_0^s |f'(u)|duds \leqslant ||f||_{W^{1,1}}$$

   on trouve $||I(f)||_{BV} \leqslant 2||f||_{W^{1,1}}$ d'où la continuité de I.

   On montre que la norme induite par $W^{1,1}$ sur ImI est équivalent à celle de BV, de sorte que, comme $W^{1,1}$ est complet par le cours, $Im(I)$ sera complet pour la topologie induite de BV et donc fermé (on a rappellé au chap 0 que les complets d'un espace mériques sont toujours fermés). Montrons donc :$||f||_{W^{1,1}} \leqslant 2||I(f)||_{BV}$ ce qui concluera à l'équivalence des normes. Il suffit de traiter le cas à f polynomiale, car on a par Weierstrass et densité des fonctions continues dans L^1, une suite Q_n de polynÃ´mes tels que $||P_n - f'||_1 \to 0$ et alors $Q_n(x) := C(f) + \int_0^x P_n(t)dt$, donne un polynÃ´me qui converge dans $W^{1,1}$ vers f car

$$||Q_n - f||_{W^{1,1}} \leqslant ||P_n - f'||_1 + \int_0^1 dx \int_0^x dt ||P_n(t) - f'(t)| \leqslant 2||P_n - f'||_1.$$

   Enfin, dans le cas f polynomiales, on peut prendre une subdivision t_i tel que f ne change pas de signe sur $[t_i, t_{i+1}]$ vu que f a une nombre fini de zéro.

   Alors, en utilisant ce signe constant à la dernière égalité

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)| = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(s)|$$

   donc en utilisant Chastes $\int_0^1 |f'(s)|ds \leqslant ||f||_{BV} - |f(0)|$, de plus $\int_0^1 |f(s)|ds \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(s)|ds$ donc :

$$||f||_{W^{1,1}} \leqslant |f(0)| + 2(||I(f)||_{BV} - |f(0)|) \leqslant 2||I(f)||_{BV}.$$

   On aurait pas pu faire ce raisonnement avec une fonction continue car $x^2 \sin(1/x)$ est continue mais change un nombre infini de fois de signe sur $[0,1]$.

9. Montrer que pour $(f,t) \in C_b^1([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R}, g \in C_b^1([0,1])$ d'où :

$$[I^t \circ \phi(f,t)](g) = \phi(f,t)(I(g)) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f'(u)g(u)du + tI(g)(0)$$
$$= \int_0^1 g'(s)f(s)ds + tC(g),$$

   où on a utilisé la relation d'intégration par partie (car les fonctions sont C^1, par possible avec des fonctions dérivable p.p., et mÃªme avec des fonctions C^1 par morceau cela n'aurait pas la mÃªme forme) et la définition de I. Prenons par densité $f_n \to f \in C^0, g_n \to g \in W^{1,1}$ (Weierstrass+ question précédente, pour la densité des polynÃ´mes dans $W^{1,1}$) dans les topo respectives de ces espaces. Comme les deux membres de l'égalité sont continues, la relation voulue s'obtient à la limite. Noter que la continuité du membre de gauche vient de la définition de l'extension ϕ et la continuité de I^t. La continuité du mebre de droite car $g \to g'$ est continue de $W^{1,1}$ vers L^1 par définition et $C^0 \subset L^\infty$ isométrique donc Holder donne la continuité voulue du terme avec intégrale.

10. Pour voir que $I^t \circ \phi$ injective il suffit d'appliquer à $[I^t \circ \phi(f,t)] = 0$ à $g = 1$ la relation qui donne $t = 0$ puis pour tout $g' \in L^1$ venant de $g(x) = \int_0^x g'(s)ds$ alors $\int_0^1 g'(s)f(s)ds = 0$ donc (en regardant le sup sur la boule unité de L^1 pour identifier la norme de L^∞), $||f||_{L^\infty([0,1])} = 0$ soit $f = 0$ p.p. mais f continue donc $f = 0$.

11. Soit $f \in L^\infty([0,1], Leb)$ et $\psi_f(g) = \int_0^1 g'(s)f(s)ds$, montrons en utilisant le théorème de prolongement de Hahn-Banach que $\psi_f \in Im(I^t)$.

    D'abord montrons que $\psi_f \in (W^{1,1}([0,1]))'$. En effet, $g' \in L^1, f \in L^\infty$ donc par Holder l'intégrale est bien définie, linéaire en g et $|\psi_f(g)| \leqslant ||g'||_1||f||_\infty \leqslant ||g||_{W^{1,1}}||f||_\infty$. Donc ψ_f linéaire continue et $||\psi_f||_{(W^{1,1}([0,1]))'} \leqslant ||f||_\infty$. On considère $\psi_f \circ I^{-1}$ sur Im(I) on a $|\psi_f \circ I^{-1}(g)| \leqslant ||f||_\infty ||I^{-1}(g)||_{W^{1,1}} \leqslant 2||f||_\infty ||g||_{BV}$ donc par Hahn-Banach, s'étend en une application $F \in (BV)'$ de norme inférieur à $2||f||_\infty$. Or $I^t(F) = F \circ I = \psi_f \circ I^{-1} \circ I = \psi_f$ d'où $\psi_f \in Im(I^t)$ Si ϕ était surjective., ψ_f s'écrirait par le 9 :

    $$\psi_f(g) = \int_0^1 g'(s)f(s)ds = \int_0^1 g'(s)f_1(s)ds + tC(g)$$

    pour f_1 continue. Or pour tout $g' \in L^1$ on trouve g avec $C(g) = 0$ ayant dérivée g' d'où $\int_0^1 g'(s)(f(s) - f_1(s))ds = 0$ pour tout $g' \in L^1$ donc $f - f_1 = 0$ p.p. une contradiction car toute fonction mesurable bornée n'est pas p.p. égale à une fonction continue (ex : une indicatrice de segment n'a pas de prolongement continue, bien qu'elle ait un prologement p.p. continue, noter la différence...).

    POur montrer cela sans Hahn-Banach on peut utiliser le cas des indicatrices de segments. POur $p \in]0,1[$, on a déjà vu $\delta_p \in BV'$ et il est facile de voir qu'elle prolonge $\psi_{1_{[0,p]}}$. Le mÃªme raisonnement s'applique alors puisque $1_{[0,p]}$ n'est pas continue.

Remarque 1. $\phi(f,0)(g)$ est noté $\int_0^1 f(s)dg(s)$ s'appelle l'intégrale de Stieltjes d'une fonction continue par rapport à une fonction à variation bornée. Elle a des applications en probabilité.

Remarque 2. comme on peut voir que $u : BV([0,1]) \cap D([0,1]) \to (C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R})'$ défini par $u(x)(y,t) = \phi(y,t)(x)$ est une homéomorphisme linéaire avec $D([0,1]) \subset B_b([0,1])$ les fonctions continues à droites sur $]0,1]$ (pas forcément en 0), cela permet de voir que $(u^{-1})^t \circ \phi = J : C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R} \to (C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R})''$ canonique n'est pas surjectif donc, grâce au cours, cet espace et son dual $BV([0,1]) \cap D([0,1])$ ne sont pas réflexifs. Cela donne cependant un espace dual $BV([0,1]) \cap D([0,1])$ contenant $W^{1,1}(]0,1[)$ et qui a plus de compacts (pour la topologie préfaible du chapitre 5). Il permet de résoudre des défauts de compacité dans $W^{1,1}$. $f \in ImI =: AC([0,1])$ est dite absolument continue. La construction de I donne qu'elle est *p.p.* dérivable et l'intégrale de sa dérivée p.p.

Montrons la remarque (en utilisant la fin du cours). Vu la borne du (7) u est bien défini et contractante. car$|\phi(y,t)(x)| \leqslant ||x||_{BV}||(y,t)||$ donc $||u(x)|| \leqslant ||x||_{BV}$ et la linéarité est claire par définition de l'extension ϕ. L'injectivité de u vient du fait que $u(f,t) = 0$

restreinte à toute fonction C^1 implique par densité de C^0 dans L^1, $f = 0$ dans L^∞ soit $f = 0$ p.p. et en restreingant aux fonctions continue à droite cela implique par continuité $f = 0$ d'où l'injectivité.

Il faut voir que u est surjectif. Par exercice 1 du TD 2 2015 (corrigé sur le site) $(C^0([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R})' = (C^0([0,1]))' \oplus^1 \mathbb{R}$ Par le théorème de Radon Riesz, $(C^0([0,1]))' = M([0,1])$ l'ensemble des mesures de Radon signée sur $[0,1]$.

Pour un pair $(\mu, \lambda) \in M([0,1]) \oplus^1 \mathbb{R}$, on considère la restriction à $(g,t) \in C_b^1([0,1]) \oplus^\infty \mathbb{R}$: auquel cas, par unicité de l'extension de ϕ on cherche $f \in BV \cap D$ avec :

$$\Phi_1(g,t)(f) = \int g d\mu + t\lambda = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 g'(s)f(s)ds + tf(0)$$

Pour $g = 0$, cela force $f(0) = \lambda$, pour $(g,t) = (1,1)$, cela force : $f(1) = \mu([0,1]) + \lambda$. Vu la contrainte de continuité à droite, cela suggère $f(s) = \mu([0,s]) + \lambda$, si $s > 0$. En effet par convergence dominé (par une constante) pour les mesures signées $\lim_{\epsilon \to 0} f(s+\epsilon) = \mu([0,s]) + \lambda = f(s)$ si $s > 0$. Voyons qu'en effet, $u(f) = (\mu, \lambda)$. Or, il est simple d'égaler les valeurs en $(0,t)$, donc égalons les valeurs en $(g,0)$ en utilisant Fubini pour mesure signée (à une fonction bornée)

$$\begin{aligned}
&f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 g'(s)f(s)ds \\
&\qquad = \lambda(g(1) - g(0) - \int_0^1 g'(s)ds) + g(1)\mu([0,1]) - \int_0^1 g'(s) \int_0^s d\mu(t)ds \\
&\qquad = g(1)\mu([0,1]) - \int_0^1 d\mu(t) \int_t^1 g'(s)ds \\
&\qquad = g(1)\mu([0,1]) - \int_0^1 d\mu(t)(g(1) - g(t)) = \int_0^1 d\mu(t)g(t)
\end{aligned}$$

Cela suggère que les fonctions BV sont des généralisations des fonctions absolument continues (de $W^{1,1}$) où la dérivée intégrable est remplacée par une mesure. C'est l'intégrale par rapport à cette mesure que construit l'intégrale de Stieltjes.