Devoir Maison pour le lundi 2 novembre 2015

Opérateurs compacts.

Soient E, F, G des espaces de Banach. On dit que l'application linéaire continue $u : E \to F$ est compacte si l'adhérence dans F de l'image de la boule unité de E : $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte. On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts dans $(L(E,F), |||.|||)$ muni de la norme d'opérateur.

1. Montrer que si $u : E \to F$ est linéaire continue de rang fini (c'est-à -dire $Im(u)$ de dimension finie) alors u est compacte.
2. Montrer que $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel.
3. Montrer que $K(E,F)$ est un espace de Banach (pour $|||.|||$).
4. Soit $E = (C^0([0,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ et $g \in C^0([0,1]^2, \mathbb{R})$.
   On définit $u : E \to E$ par :
   $$[u(f)](s) = \int_0^1 g(s,t) f(t) dt.$$
   Montrer que u est une application linéaire continue compacte (indication : utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass pour approcher g par des polynômes)
5. Si $u \in K(E,F)$ et $v \in L(F,G)$ montrer que $v \circ u \in K(E,G)$.
6. Si $u \in L(E,F)$ et $v \in K(F,G)$ montrer que $v \circ u \in K(E,G)$.
7. Soit $u \in K(E,F)$ et soit une suite bornée (x_n) qui converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, c'est à dire que pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to 0$, montrer que $||u(x_n)|| \to 0$.
8. Soit $a_1, ...a_n \in E$ des vecteurs linéairement indépendants. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $||b_i|| \leqslant \epsilon$ alors $a_1+b_1, ..., a_n+b_n$ sont linéairement indépendants (Indication : utiliser Hahn-Banach).
   En déduire que l'ensemble $F_n(E,E)$ des application linéaires continues de rang $dim(Im(u)) \leqslant n$ est un fermé non-vide.
9. On rappelle le théorème de Baire selon lequel dans un espace de Banach toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
   En déduire de la question précédente que pour tout espace de Banach de dimension infinie E, il existe un opérateur compact de $K(E,E)$ qui n'est pas de rang fini.