Devoir Maison 1 pour le mercredi 2 novembre

Opérateurs compacts.

Soient E, F des espaces de Banach. On dit que l'application linéaire continue $u : E \to F$ est compacte si l'adhérence dans F de l'image de la boule unité de E : $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte. On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts dans $(L(E,F), |||.|||)$

1. Montrer que si $u : E \to F$ est linéaire continue et que soit E soit F est de dimension finie alors u est compacte.
2. Montrer que $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel.
3. Soit $u_n \in K(E,F)$. On suppose qu'il existe $u \in L(E,F)$ tel que $|||u_n - u||| \to 0$. Montrer que $u(B_E(0,1))$ est précompact. En déduire, que $K(E,F)$ est fermé.
4. Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Soient $1 < p \leqslant \infty$, $E = (L^p(\Omega,\mu), ||.||_p), F = (L^q(\Omega,\mu), ||.||_q)$ et $g \in L^q(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ avec $1/p + 1/q = 1$
   On définit $u : E \to F$ par :
   $$[u(f)](s) = \int_\Omega g(s,t) f(t) dt.$$
   Montrer que u est une application linéaire continue avec $|||u||| \leqslant ||g||_q$. Montrer aussi que u est compacte (On pourra utiliser la densité des fonctions étagées dans $L^q(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$).
5. Soit X un espace métrique compact et μ une mesure de Radon sur X. Soit $E = (C^0(X, \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ et $g \in C^0(X^2, \mathbb{R})$.
   On définit $v : E \to E$ par :
   $$[v(f)](s) = \int_X g(s,t) f(t) d\mu(t).$$
   Montrer que v est une application linéaire continue avec $|||v||| \leqslant ||g||_\infty$.
   Montrer que $\{v(f), ||f||_\infty \leqslant 1\}$ est équicontinue dans $C^0(X, \mathbb{R})$. En déduire en utilisant le théorème d'Ascoli que v est compacte.
6. On reprend le cadre de la question précdente. Soit $F = (L^1(X,\mu), ||.||_1)$ On définit $w : F \to F$ par :
   $$[w(f)](s) = \int_X g(s,t) f(t) dt.$$
   Montrer que w est un opérateur compact.
7. Soit $u \in K(E,F)$. On veut montrer que l'application transposée $u^t \in K(F', E')$ est compacte. Soit $A = \overline{u(B_E(0,1))} \subset F$. Soit $z_n \in B_{F'}(0,1)$. On pose pour $x \in A$, $f_n(x) = z_n(x)$. Appliquer le Théorème d'Ascoli à $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$. En conclure que $(u^t(z_n))$ a une sous-suite convergente et conclure.
8. Soit $u \in L(E,F)$ avec $u^t \in K(F', E')$. Montrer que $u \in K(E,F)$. (Indiquer où on utilise le théorème de Hahn-Banach).