Correction du Devoir Maison pour le mercredi 2 novembre 2016
Opérateurs compacts.

Soient E, F des espaces de Banach. On dit que l'application linéaire continue $u : E \to F$ est compacte si l'adhérence dans F de l'image de la boule unité de E : $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte. On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts dans $(L(E,F), |||.|||)$.

1. Soit $u : E \to F$ qui est linéaire continue. Si $dimE$ est fini, Si $e_1, ..., e_n$ base de E alors l'image $Im(u) = G = Vect(u(e_1), ..., u(e_n)) \subset F$ et en remplaçant F par G on se ramène au cas où $dimF$ est finie.

   Si F de dimension finie, comme $u(B_E(0,1)) \subset B_F(0, |||u|||)$ donc il est borné et son adhérence est donc fermé bornée de l'espace de dimension finie F donc est compact. Ainsi u est un opérateur compact.

2. Montrons que $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.

   -$0 \in K(E,F)$ car 0 est un opérateur de rang fini (qui se ramène au cas du 1 car $Im(u) \subset F$ et un compact de $Im(u)$ est compact dans F par image continue par l'injection continue de $Im(u)$ dans F).

   -Stabilité par multiplication. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, et u compact, $\lambda.\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte comme image du compact $\overline{u(B_E(0,1))}$ par l'application linéaire continue de multiplication par λ. Or
   $$(\lambda u)(B_E(0,1)) \subset \lambda.\overline{u(B_E(0,1))}$$
   donc en passant à l'adhérence $\overline{(\lambda u)(B_E(0,1))} \subset \lambda.\overline{u(B_E(0,1))}$ donc cet ensemble est compact comme fermé d'un compact (en fait il sont égaux mais on n'a pas besoin de le vérifier).

   -Stabilité par somme. Soient u, v compacts, de sorte que $\overline{u(B_E(0,1))}$ et $\overline{v(B_E(0,1))}$ sont compacts. Par le théorème de Tychonov, le produit $\overline{u(B_E(0,1))} \times \overline{v(B_E(0,1))}$ est compact, donc en prenant l'image par l'application $. + . : F \times F \to F$ qui est continue on obtient que l'espace somme$\overline{u(B_E(0,1))} + \overline{v(B_E(0,1))}$ est compact.

   De plus,
   $$(u+v)(B_E(0,1)) \subset u(B_E(0,1)) + v(B_E(0,1)) \subset \overline{u(B_E(0,1))} + \overline{v(B_E(0,1))}$$
   donc en passant à l'adhérence, comme on sait que le second est compact donc fermé) on obtient :
   $$\overline{(u+v)(B_E(0,1))} \subset \overline{u(B_E(0,1))} + \overline{v(B_E(0,1))}$$
   qui est fermé dans un compact donc compact.

   Enfin, on a donc bien $K(E,F)$ qui est un sous-espace vectoriel.

   A noter, on a $\overline{A+B} \supset \overline{A} + \overline{B}$ en général mais l'autre inclusion n'est pas vrai en dehors du cas compact, on ne peut donc pas l'affirmer a priori sans avoir montré la compacité (au moins un de $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ compact). En effet pour $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 xy = 1, x > 0\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$, B est clairement fermé mais A aussi (séquentiellement $x_n \to x, y_n \to y$ implique $x_n y_n \to xy = 1$ donc de $x_n \to x \geqslant 0$ on déduit $x > 0$ comme xy=1) Or $A + B =]0, \infty[\times \mathbb{R} \neq \overline{A+B}$ car la somme n'est pas fermé.

3. Montrons que $K(E,F)$ est un espace de Banach (pour $|||.|||$). Comme $L(E,F)$ est un espace de Banach car F complet, on montre que le sous-espace (par 2) $K(E,F)$ est fermé. Soit $u_n \in K(E,F)$, $|||u_n - u||| \to 0$. montrons que u est compact.

Méthode (par précompacité). Comme F complet $\overline{u(B_E(0,1))}$ est fermé dans un complet donc complet. Il reste à voir qu'il est précompact pour voir qu'il est compact.

Soit $\epsilon > 0$, $|||u_n - u||| \leqslant \epsilon/4$ alors comme $u_n(B_E(0,1))$ est précompact (car d'adhérence compacte), on le recouvre par $\cup_{i=1}^k B(t_k, \epsilon/4)$ et $t_k = u_n(s_k) \in u_n(B_E(0,1))$. Alors si $x \in B_E(0,1)$, $||u(x) - u(s_k)|| \leqslant 2|||u - u_n||| + ||u_n(x) - u_n(s_k)|| \leqslant 3\epsilon/4$ on déduit qu'en choisissant le s_k grâce au recouvrement pour u_n, on a

$$u(B_E(0,1)) \subset \cup_{i=1}^k B(u(s_k), 3\epsilon/4) \quad donc \quad \overline{u(B_E(0,1))} \subset \cup_{i=1}^k B(u(s_k), \epsilon).$$

Comme ϵ est arbitraire, $\overline{u(B_E(0,1))}$ est donc précompact, et comme il est complet, il est compact.

Rmq dans la précompacité, on peut aussi avoir les centres des recouvrements à l'extérieur de l'ensemble, le nombre de recouvrement reste le même, au prix de changer le ϵ en 2ϵ (passer de t_k à $u(s_k)$ n'est pas vraiment nécessaire si on a vu ce résultat).

4. Soit (Ω, μ) un espace mesuré σ-fini. Soient $1 < p \leqslant \infty$, $E = (L^p(\Omega, \mu), ||.||_p), F = (L^q(\Omega, \mu), ||.||_q)$ et $g \in L^q(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ avec $1/p + 1/q = 1$
On définit $u : E \to F$ par :

$$[u(f)](s) = \int_\Omega g(s,t) f(t) d\mu(t).$$

Montrons que u est une application linéaire continue avec $|||u||| \leqslant ||g||_q$.
D'abord pour preque tout s par Fubini-Tonelli, $g(s,.) \in L^q(\Omega)$ et par Hölder, l'intégrale définissant u est bien défini et on a :

$$|[u(f)](s)| \leqslant ||f||_p \left(\int_\Omega |g(s,t)|^q d\mu(t) \right)^{1/q}$$

donc $u(f)$ est b ien définit presque partout et on a l'inégalité en intégrant :

$$\int |[u(f)](s)|^q d\mu(s) \leqslant ||f||_p^q \left(\int_{\Omega^2} |g(s,t)|^q d\mu(t) \mu(s) \right).$$

DOnc u est bien définie à valeur F. u est linéaire par linarité de l'intégrale et l'inégalité précédente donne :

$$||u(f)||_q \leqslant ||f||_p ||g||_q$$

ce qui donne u continue et $|||u||| \leqslant ||g||_q$.
Montrons aussi que u est compacte. D'après le cours, soit (g_n) suite de fonctions étagées dans $L^q(\Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$ convergeant vers g. Si $g_n = \sum_{i=1}^I \lambda_i 1_{A_i}$ est une somme finie et u_n définit comme u avec g remplacé par g_n. Pour des A_i généraux, il n'est pas clair que u_n soit de rang fini. On approche donc encore A_i. COmme la tribue produit est engendrée par les ensembles produits $C \times D$, on écrit $A_i = \cup_n C_{n,i} \times D_{n,i}$ (en effet, les ensembles produits d'ensembles mesurables sont stables par intersections dénombrables et la famille des unions dénombrables ci-dessus est donc stable par unions et intersections dénombrables (et par complémetaire car le compémentaire d'un ensemble produit est une union de produits) et coincide donc avec la tribu engendrée). DOnc $\mu(\cup_{n \leqslant N} C_{n,i} \times D_{n_i}) \to \mu(A_i)$ donc on peut remplacer g_n par le cas où chaque A_i est une union fini d'ensembles produits.

Par la formule d'inclusion exclusion

$$1_{\cup_{n\leqslant N} C_{n,i}\times D_{n,i}} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\sum_{n_1<\ldots<n_k} 1_{\cap_{j=1}^{k} C_{n_j,i}\times D_{n_j,i}}.$$

Donc on peut écrire g_n avec chaque A_i un ensemble produit. C'est donc ce que l'on suppose maintenant $A_i = C_i \times D_i$.
Alors $u_n(f) = \sum_i 1_{C_i}\int_{D_i} f\lambda_i \in Vect(1_{C_i}, i = 1, ..., I)$ donc u_n est de rang fini et donc par le 1, u_n est un opérateur compact. Or $|||u_n - u||| \leqslant ||g_n - g||_q \to 0$ donc u est dans l'adhérence de $K(E, F)$ qui est fermé donc $u \in K(E, F)$. Ce qui conclut.

5. Soit X un espace métrique compact et μ une mesure de Radon sur X avec $\mu(X) = 1$. Soit $E = (C^0(X, \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ et $g \in C^0(X^2, \mathbb{R})$.
On définit $v : E \to E$ par :

$$[v(f)](s) = \int_X g(s,t)f(t)d\mu(t).$$

Montrons que v est une application linéaire continue avec $|||v||| \leqslant ||g||_\infty$.
-$[v(f)](s)$ est bien continue en s comme intégrale dépendant d'un paramètre (domination par la fonction constante $||g||_\infty||f||_\infty$) donc $u : E\text{ø}E$ bien définie.

-v linéaire en f par linéarité de l'intégrale.

-continuité de u comme g est continue sur un compact elle est bornée par $||g||_\infty$ et $|g(s,t)f(t)| \leqslant ||g||_\infty||f||_\infty$ donc en intégrant et prenant le sup en s

$$||v(f)||_\infty \leqslant \sup_{s\in[0,1]}\int_0^1 |g(s,t)f(t)| \leqslant ||g||_\infty||f||_\infty$$

donc en passant au sur les $||f|| \leqslant 1$:

$$|||v||| \leqslant ||g||_\infty.$$

Montrons que $\{v(f), ||f||_\infty \leqslant 1\}$ est équicontinue dans $C^0(X, \mathbb{R})$. En effet, g est continue sur le compact X^2 donc uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$ il existe donc $\delta > 0$ tel que si $d((s,t),(s',t')) \leqslant \delta$ alors $|g(s,t) - g(s',t')| \leqslant \epsilon$. En particulier si $d(s,r) \leqslant \delta$, pour f avec $||f||_\infty \leqslant 1$

$$|v(f)(s) - v(f)(r)| = |\int_X (g(s,t) - g(r,t))f(t)d\mu(t)| \leqslant \epsilon\int |f(t)|d\mu(t) \leqslant \epsilon$$

donc $\{v(f), ||f||_\infty \leqslant 1\}$ est équicontinue.
De plus $\{v(f), ||f||_\infty \leqslant 1\} \subset C^0(X, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ est un evn de dimension finie, et est une famille bornée car $\underline{||v(f)|| \leqslant |||v|||||f|| \leqslant ||g||_\infty}$ et équicontinue donc par le théorème d'Ascoli $\overline{\{v(f), ||f||_\infty \leqslant 1\}}$ est un compact de E qui contient le fermé $\overline{v(B_E(0,1))}$ qui est donc compact et v est donc compacte.

6. On reprend le cadre de la question précdente. Soit $F = (L^1(X,\mu), ||.||_1)$ On définit $w : F \to F$ par :

$$[w(f)](s) = \int_X g(s,t)f(t)dt.$$

Pour montrer que w est un opérateur compact, on considère $W : F \to E$ avec la même formule. On suit le raisonnement de la question précédente : -$[W(f)](s)$ est bien continue en s comme intégrale dépendant d'un paramètre (par domination par la fonction constante $||g||_\infty f \in L^1(X)$ et continuité de g) donc $W : F \to E$ bien définie.

-W linéaire en f par linéarité de l'intégrale.

-continuité de W comme g est continue sur un compact elle est bornée par $||g||_\infty$ et $|g(s,t)f(t)| \leqslant ||g||_\infty |f(t)|$ donc en intégrant et prenant le sup en s

$$||W(f)||_\infty \leqslant \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |g(s,t)f(t)| \leqslant ||g||_\infty ||f||_1$$

donc en passant au sur les $||f|| \leqslant 1$:

$$|||W||| \leqslant ||g||_\infty.$$

Comme à la question précédente : $\{W(f), ||f||_1 \leqslant 1\}$ est équicontinue borné de E donc par le Théorème d'Ascoli, d'adhérence compact, donc W est un opérateur compact. Or soit $I : E \to F$ l'injection contractante, on a $w = I \circ W$ Donc $w(B_E(0,1)) \subset I(\overline{\{W(f), ||f||_1 \leqslant 1\}})$ qui est compact comme image continue d'un compact donc $\overline{w(B_E(0,1))}$ est fermé dans un compact donc compact. Donc w est un opérateur compact.

7. Soit $u \in K(E,F)$. On veut montrer que l'application transposée $u^t \in K(F',E')$ est compacte (on sait déjà du cours $u^t \in L(F',E')$). Soit $A = \overline{u(B_E(0,1))} \subset F$. Soit $z_n \in B_{F'}(0,1)$. On pose pour $x \in A$, $f_n(x) = z_n(x)$. Appliquons le Théorème d'Ascoli à $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$.
Par hypothèse sur u A est un espace métrique compact et $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension fini. Or par continuité de z_n on peut supprimer l'adhérence dans le sup et obtenir

$$||f_n||_\infty = \sup_{x\in\overline{u(B_E(0,1))}} |z_n(x)| = \sup_{x\in u(B_E(0,1))} |z_n(x)| = \sup_{y\in B_E(0,1)} |z_n(u(y))| \leqslant |||u|||.$$

Donc $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$ est bornée. Vérifions que $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
Soit donc $x, x' \in A$, on calcule :
$|f_n(x) - f_n(y)| = |z_n(x - x')| \leqslant ||x - x'||$ donc $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$ sont lipschitzienne de même constante 1 donc forme une famille équicontinue.
Du Théorème d'Ascoli, on conclut donc que $\overline{\{f_n, n \in \mathbb{N}\}} \subset C^0(A, \mathbb{R})$ est compact.
DOnc il existe une sous-suite f_{n_k} convergeant uniformément donc de Cauchy.
MOntronsque $(u^t(z_{n_k}))$ est une sous-suite convergente.
En effet, il suffit de voir que c'est une suite de Cauchy,

$$\begin{aligned} ||u^t(z_{n_k}) - u^t(z_{n_p})|| &= \sup_{x\in B_E(0,1)} ||u^t(z_{n_k})(x) - u^t(z_{n_p})(x)|| \\ &= \sup_{x\in B_E(0,1)} ||z_{n_k}(u(x)) - z_{n_p}(u(x))|| \\ &\leqslant \sup_{y\in A} ||z_{n_k}(y) - z_{n_p}(y)|| = ||f_{n_k} - f_{n_p}||_\infty \end{aligned}$$

ce qui vient donc de (f_{n_k}) de Cauchy.
En conclusion, pour toute suite $u^t(z_n)$ de $u^t(B_{F'}(0,1))$ admet une sous-suite convergente (dans E'). Prenons donc une suite y_n du fermé $\overline{u^t(B_{F'}(0,1))}$ par définition on trouve $||y_n - u^t(z_n)|| \leqslant 1/n$ on extrait un sous-suite convergente $(u^t(z_{n_k}))$ de $u^t(z_n)$ et alors (y_{n_k}) converge vers la même limite $y \in \overline{u^t(B_{F'}(0,1))}$ comme cet ensemble est fermé. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass, on déduit que $\overline{u^t(B_{F'}(0,1))}$ est un espace métrique compact. DOnc $u^t \in K(F',E')$.

8. Soit $u \in L(E,F)$ avec $u^t \in K(F',E')$.
On suit le même raisonnement que dans la question précédente.
Soit $A = \overline{u^t(B_{F'}(0,1))} \subset E'$. Soit $z_n \in B_F(0,1)$. On pose pour $x \in A$, $f_n(x) = x(z_n)$. Appliquons le Théorème d'Ascoli à $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$.
Par hypothèse sur u^t, A est un espace métrique compact et $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension fini. Or par continuité de z_n on peut supprimer l'adhérence dans le sup et obtenir

$$||f_n||_\infty = \sup_{x \in \overline{u^t(B_{F'}(0,1))}} |z_n(x)| = \sup_{x \in u^t(B_{F'}(0,1))} |z_n(x)| = \sup_{y \in B_{F'}(0,1)} |y(u(z_n))| \leqslant |||u|||.$$

Donc $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$ est bornée. Vérifions que $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
Soit donc $x, x' \in A$, on calcule :
$|f_n(x) - f_n(y)| = |(x - x')(z_n)| \leqslant ||x - x'||_{E'}$ donc $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(A, \mathbb{R})$ sont lipschitziennes de même constante 1 donc forment une famille équicontinue.
Du Théorème d'Ascoli, on conclut donc que $\overline{\{f_n, n \in \mathbb{N}\}} \subset C^0(A, \mathbb{R})$ est compact.
DOnc il existe une sous-suite f_{n_k} convergeant uniformément donc de Cauchy.
MOntronsque $(u(z_{n_k}))$ est une sous-suite convergente.
En effet, il suffit de voir que c'est une suite de Cauchy comme F est complet. Or on peut utiliser Hahn-Banach pour la formule de la norme de F (première égalité) :

$$\begin{aligned}
||u(z_{n_k}) - u(z_{n_p})||_F &= \sup_{x \in B_{F'}(0,1)} ||x(u)(z_{n_k}) - x(u(z_{n_p}))|| \\
&= \sup_{x \in B_{F'}(0,1)} ||u^t(x)(z_{n_k}) - u^t(x)(z_{n_p})|| \\
&\leqslant \sup_{y \in A} ||y(z_{n_k}) - y(z_{n_p})|| = ||f_{n_k} - f_{n_p}||_\infty
\end{aligned}$$

ce qui vient donc de (f_{n_k}) de Cauchy.
En conclusion, pour toute suite $u(z_n)$ de $u(B_E(0,1))$ admet une sous-suite convergente (dans F). Prenons donc une suite y_n du fermé $\overline{u(B_E(0,1))}$ par définition on trouve $||y_n - u(z_n)|| \leqslant 1/n$ on extrait un sous-suite convergente $(u(z_{n_k}))$ de $u^t(z_n)$ et alors (y_{n_k}) converge vers la même limite $y \in \overline{u(B_E(0,1))}$ comme cet ensemble est fermé. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass, on déduit que $\overline{u(B_E(0,1))}$ est un espace métrique compact. DOnc $u \in K(E,F)$.