Correction du Devoir Maison pour le lundi 2 novembre 2015
Opérateurs compacts.

Soient E, F, G des espaces de Banach. On dit que l'application linéaire continue $u : E \to F$ est compacte si l'adhérence dans F de l'image de la boule unité de E : $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte. On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts dans $(L(E,F), |||.|||)$ muni de la norme d'opérateur.

1. Montrons que si $u : E \to F$ est linéaire continue de rang fini (c'est-à -dire $Im(u)$ de dimension finie) alors u est compacte. Si $Im(u)$ de dimension finie, il est complet donc fermé, donc de $u(B_E(0,1)) \subset Im(u)$ on déduit en passant à l'adhérence $\overline{u(B_E(0,1))} \subset Im(u)$. De plus $u(B_E(0,1)) \subset B_E(0, ||u||)$ donc il est borné et son adhérence est donc fermé bornée de l'espace de dimension finie $Im(u)$ donc est compacte. Ainsi u est un opérateur compact.
2. Montrons que $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel.
-$0 \in K(E,F)$ car 0 est un opérateur de rang fini.
-Stabilité par multiplication. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, et u compact, $\lambda.\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte comme image du compact $\overline{u(B_E(0,1))}$ par l'application linéaire continue de multiplication par λ. Or
$$(\lambda u)(B_E(0,1)) \subset \lambda.\overline{u(B_E(0,1))}$$
donc en passant à l'adhérence $\overline{(\lambda u)(B_E(0,1))} \subset \lambda.\overline{u(B_E(0,1))}$ donc cet ensemble est compact comme fermé d'un compact (en fait il sont égaux mais on n'a pas besoin de le vérifier).
-Stabilité par somme. Soient u, v compacts, de sorte que $\overline{u(B_E(0,1))}$ et $\overline{v(B_E(0,1))}$ sont compacts. Par le théorème de Tychonov, le produit $\overline{u(B_E(0,1))} \times \overline{v(B_E(0,1))}$ est compact, donc en prenant l'image par l'application $. + . : F \times F \to F$ qui est continue on obtient que l'espace somme$\overline{u(B_E(0,1))} + \overline{v(B_E(0,1))}$ est compact.
De plus,
$$(u+v)(B_E(0,1)) \subset u(B_E(0,1)) + v(B_E(0,1)) \subset \overline{u(B_E(0,1))} + \overline{v(B_E(0,1))}$$
donc en passant à l'adhérence, comme on sait que le second est compact donc fermé) on obtient :
$$\overline{(u+v)(B_E(0,1))} \subset \overline{u(B_E(0,1))} + \overline{v(B_E(0,1))}$$
qui est fermé dans un compact donc compact.
Enfin, on a donc bien $K(E,F)$ qui est un sous-espace vectoriel.
A noter, on a $\overline{A+B} \supset \overline{A} + \overline{B}$ en général mais l'autre inclusion n'est pas vrai en dehors du cas compact, on ne peut donc pas l'affirmer a priori sans avoir montré la compacité (au moins un de $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ compact). En effet pour $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 xy = 1, x > 0\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$, B est clairement fermé mais A aussi (séquentiellement $x_n \to x, y_n \to y$ implique $x_n y_n \to xy = 1$ donc de $x_n \to x \geqslant 0$ on déduit $x > 0$ comme xy=1) Or $A + B =]0, \infty[\times \mathbb{R} \neq \overline{A+B}$ car la somme n'est pas fermé.
3. Montrons que $K(E,F)$ est un espace de Banach (pour $|||.|||$). Comme $L(E,F)$ est un espace de Banach car F complet, on montre que le sous-espace (par 2) $K(E,F)$ est fermé. Soit $u_n \in K(E,F)$, $||u_n - u|| \to 0$. montrons que u est compact.
Méthode 1 :(directe avec des suites). Soit donc (x_m) suite bornée de $B_E(0,1)$. On extrait une sous-suite $x_m^{(1)} = x_{\phi(m)}$ telle que $u_1(x_m^{(1)})$ converge (en utilisant u_1

compacte. Comme la sous-suite dépend de u_1 on va faire une extraction diagonale pour avoir une sous-suite qui marche pour tous les termes de l'approximation.
Par récurrence, on construit $x_m^{(n)} = x_{\phi^n(m)}^{(n-1)}$ extraite de la suite précédente telle que $u_n(x_m^{(n)})$ converge. Comma la suite est ré-extraite, on a aussi pour tout $l \leqslant n$, $u_l(x_m^{(n)})$ converge.
Après construction, on prend $y_n = x_n^{(n)} = x_{\phi(\phi^2(\dots\phi^n(n))}$. Comme les suites $x^{(m)}$ sont extraites de $x^{(n)}$ à partir du rang $m \geqslant n$, on a $(y_{n+m})_{m\geqslant 0}$ extraite de $x^{(n)}$
[explicitement pour ceux qui n'auraient jamais vu le procédé d'extraction diagonale : $y_{n+m} = x_{\phi^{n+1}(\dots\phi^{n+m}(n+m))}^{(n)}$ et on a bien

$$\phi^{n+1}(\dots\phi^{n+m}(n+m)) < \phi^{n+1}(\dots\phi^{n+m}(\phi^{n+m+1}(n+m+1))\dots)$$

par croissance de tous les ϕ^i et car $n+m < n+m+1 \leqslant \phi^{n+m+1}(n+m+1)$. (démo à ne pas répéter...)]
Donc $(u_n(y_{n+m}))_{m\geqslant 0}$ converge (car extraite de $(u_n(x_m^{(n)})_{m\geqslant 0}$ et donc finalement pour tout n, $(u_n(y_m))_{m\geqslant 0}$ converge.
Il est reste à conclure que $(u(y_m))$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ fixe, on prend n tel que $||u - u_n|| \leqslant \epsilon/3$ le n dépend du choix de ϵ (mais le choix de y_m n'en dépend pas). Pour $p, q \geqslant N$ on a $||u_n(y_p - y_q)|| \leqslant \epsilon/3$ et donc

$$||u(y_p - y_q)|| \leqslant 2||u - u_n|| + ||u_n(y_p - y_q)|| \leqslant \epsilon.$$

$(u(y_m))$ est donc de Cauchy donc converge et c'est la suite extraite cherchée qui montre que dans $u(B_E(0,1))$ toute suite a un,e suite extraite qui converge. Remarquer que l'on ne traite pas le cas avec l'adhérence dès le début pour simplifier, il est facile de l'ajouter à la fin.
Si $z_n \in \overline{u(B_E(0,1))}$ on prend $||z_n - u(x_n)|| \leqslant 1/n$ on extrait comme ci-dessus, et $z_{\phi(\phi^2(\dots\phi^n(n))}$ converge alors vers la même limite que $u(y_m)$ donc toute suite de $\overline{u(B_E(0,1))}$ admet une sous-suite convergente donc par Bolzano-Weierstrass, $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compacte pour la topologie de la norme, donc u est compacte.
Méthode 2 :(par précompacité). Comme F complet $\overline{u(B_E(0,1))}$ est fermé dans un complet donc complet. Il reste à voir qu'il est précompact pour voir qu'il est compact (c'est la preuve du résultat qui dit que dans un espace métrique complet+précompact implique compact qui cache l'extraction diagonale).
Soit $\epsilon > 0$, $||u_n - u|| \leqslant \epsilon/4$ alors comme $u_n(B_E(0,1))$ est précompact (car d'adhérence compacte), on le recouvre par $\cup_{i=1}^k B(t_k, \epsilon/4)$ et $t_k = u_n(s_k) \in u_n(B_E(0,1))$.
Alors si $x \in B_E(0,1)$, $||u(x) - u(s_k)|| \leqslant 2||u - u_n|| + ||u_n(x) - u_n(s_k)|| \leqslant 3\epsilon/4$ on déduit qu'en choisissant le s_k grâce au recouvrement pour u_n, on a

$$u(B_E(0,1)) \subset \cup_{i=1}^k B(u(s_k), 3\epsilon/4) \quad \textit{donc} \quad \overline{u(B_E(0,1))} \subset \cup_{i=1}^k B(u(s_k), \epsilon).$$

Comme ϵ est arbitraire, $\overline{u(B_E(0,1))}$ est donc précompact, et comme il est complet, il est compact.
Rmq dans la précompacité, on peut aussi avoir les centres des recouvrements à l'extérieur de l'ensemble, le nombre de recouvrement reste le même, au prix de changer le ϵ en 2ϵ (passer de t_k à $u(s_k)$ n'est pas vraiment nécessaire si on a vu ce résultat).

4. Soit $E = (C^0([0,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ et $g \in C^0([0,1]^2, \mathbb{R})$.
   On définit $u : E \to E$ par :

$$[u_g(f)](s) = [u(f)](s) = \int_0^1 g(s,t) f(t) dt.$$

Montrer que u est une application linéaire continue compacte (indication : utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass pour approcher g par des polynômes)

-$[u(f)](s)$ est bien continue en s comme intégrale dépendant d'un paramètre (cas intégrande uniformément continue par le thm de Heine) donc $u : E\o E$ bien définie.

-u linéaire en f par linéarité de l'intégrale.

-continuité de u comme g est continue sur un compact elle est bornée par $||g||_\infty$ et $|g(s,t)f(t)| \leqslant ||g||_\infty ||f||_\infty$ donc en intégrant et prenant le sup en s

$$||u(f)||_\infty \leqslant \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |g(s,t)f(t)| \leqslant ||g||_\infty ||f||_\infty$$

donc

$$|||u_g||| \leqslant ||g||_\infty.$$

-compacité de u.
Par Stone-Weierstrass, on prend P_n polynôme en deux variables avec $||P_n - g||_\infty \to 0$. Si $P_n = \sum_{i,j=1}^{k_n} a_{i,j} s^i t^j$ $u(P_n)(f) = \sum_{i,j=1}^{k_n} a_{i,j} s^i \int_0^1 t^j f(t)dt \in Vect(1, ..., s^{k_n})$ donc $u(P_n)$ est de rang fini $\leqslant k_n + 1$ donc compact par 1. De plus par ci-dessus $|||u_{P_n} - u_g||| = |||u_{P_n - g}||| \leqslant ||P_n - g|| \to 0$ donc u_{P_n} converge dans $L(E,E)$ vers u_g et comme K(E,E) est fermé dans L(E,E) on déduit, $u_g \in K(E,E)$.

Méthode 2 Utiliser le thm d'Arzela-Ascoli, mais c'est plus sophistiqué, je ne corrige pas de cette façon.

5. Si $u \in K(E,F)$ et $v \in L(F,G)$ montrer que $v \circ u \in K(E,G)$. $\overline{u(B_E(0,1))}$ est compact donc comme v continue, par image continue $v(\overline{u(B_E(0,1))})$ est compacte. Or $v(u(B_E(0,1))) \subset v(\overline{u(B_E(0,1))})$ donc en passant à l'adhérence (comme le second terme est fermé) :
$$\overline{v(u(B_E(0,1)))} \subset v(\overline{u(B_E(0,1))})$$
qui est compact comme fermé d'un compact (on pourrait voir qu'il y a égalité des ensembles mais ce n'est pas utile, même si c'est le sens facile et général de l'inclusion qui manque)
6. Si $u \in L(E,F)$ et $v \in K(F,G)$ montrer que $v \circ u \in K(E,G)$. Comme u est continue $u(B_E(0,1)) \subset B_F(0, ||u||) = ||u|| B_F(0,1)$ donc $v(u(B_E(0,1))) \subset ||u|| v(B_F(0,1))$ et comme $||u|| v \in K(F,G)$ par le 2., donc en passant à l'adhérence
$$\overline{||u|| v(B_F(0,1))} \supset \overline{v(u(B_E(0,1)))}$$
est compact comme fermé d'un compact. (là les inclusions sont en général strict, $Im(u)$ peut être de dimension finie et donc plus petit que F).
7. Soit $u \in K(E,F)$ et soit une suite bornée (x_n) (cette hypothèse est superflue par le cours de lundi via Banach-Steinhaus) qui converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, c'est à dire que pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to 0$, montrons que $||u(x_n)|| \to 0$.

   Méthode 1 On peut voir que comme $Id : (\overline{u(B_E(0,1))}, ||.||) \to (\overline{u(B_E(0,1))}, \sigma(F,F')$ est continue sur un compact et inversible, c'est un homéomorphisme et donc on peut composer son inverse continue avec $u : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$ qui est aussi continue par le cours de lundi. Comme ce cours n'était pas vue, j'attendais juste une preuve directe :

   Méthode 2 Comme (x_n) bornée (disons par $M > 0$ $||x_n|| \leqslant M$). $u(x_n) \in K = \overline{(Mu)(B_E(0,1))}$ qui est compact par 2. donc on extrait $u(x_{\phi(n)}) \to l$Pour tout $f \in F'$,

$f \circ u \in E'$ donc par l'hypothèse de convergence faible, $f \circ u(x_{\phi(n)}) \to 0 = f(l)$ Donc $f(l) = 0$ pour tout $f \in F'$. Montrons que cela implique $l = 0$. Par contraposée si $l \neq 0$, le théorème de Hahn-Banach (son corollaire du cours) donne $f \in F'$ avec $f(l) \neq 0$. Donc enfin, la seule valeur d'adhérence de $u(x_n)$ est 0 donc par compacité de K $||u(x_n)|| \to 0$ (pour rappel, la preuve qu'il n'est pas nécessaire de refaire dans les copies : sinon on extrait $||u(x_{\phi(n)})|| \geqslant c > 0$ qui quitte à réextraire par compacité converge et cela contredit que la seule valeur d'adhérence est 0.)

8. -Soit $a_1, ...a_n \in E$ des vecteurs linéairement indépendants. Montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $||b_i|| \leqslant \epsilon$ alors $a_1 + b_1, ..., a_n + b_n$ sont linéairement indépendants (Indication : utiliser Hahn-Banach).
On prend $F = Vect(a_1, ..., a_n)$ qui est de dimension fini, et on considère la base duale avec $a_j^*(a_i) = \delta_{i,j}$, $a_j^* : F \to \mathbb{K}$ est linéaire donc continue (dimension finie) donc par Hahn Banach on l'étend en une forme linéaire $f_j : E \to \mathbb{K}$.
On utilise le déterminant pour tester l'indépendance linéaire. soit $f(b_1, ...b_n) = det(f_j(a_i + b_i))$. Comme le déterminant est continue, f est continue par composée. $f(0) = det(I_n) = 1$ donc il existe $\epsilon > 0$ telle que si $||b_i|| \leqslant \epsilon$, on a $f(b_1, ..., b_n) \neq 0$.
Rappelons pourquoi cela implique $(a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$ linéairement indépendant. En effet, si ceux si ils étaient linéairement dépendants et si $f = (f_1, ...f_n) : E \to \mathbb{K}^n$ par linéarité $(f(a_1 + b_1), ..., f(a_n + b_n))$ seraient linéairement dépendant aussi en tant que vecteur de K^n est ce n'est pas le cas car leur déterminant est non-nul.

   -Déduisons que l'ensemble $F_n(E, E) \subset K(E, E)$ des applications linéaires continues de rang $dim(Im(u)) \leqslant n$ est un fermé non-vide.
La relation précédente montre que n vecteurs libres forment une condition ouverte, cela suggère de montrer que $(F_n(E, E))^c$ est un ouvert de $K(E, E)$.
En effet si u de rang $dim(Im(u)) \geqslant n + 1$, on a des vecteurs $x_0, x_1, ...x_n \in E$ tel que $u(x_0), ..., u(x_n)$ sont linéairement indépendants (quitte à normaliser $||x_i|| = 1$). Soit $\epsilon > 0$ donné par le début de la question pour ces vecteurs.
si $||f||_{K(E,E)} \leqslant \epsilon$ on trouve que $||f(x_i)|| \leqslant \epsilon$ donc par le début de la question $(u + f)(x_0), ..., (u + f)(x_n)$ sont linéairement indépendants. Donc $dim(Im(u + f)) \geqslant n + 1$ et $(F_n(E, E))^c$ est bien ouvert (il l'est aussi dans $L(E, E)$ de la même façon). $0 \in F_n(E, E)$ permet de voir qu'il est non-vide mais on aura besoin de voir à la question suivante qu'il existe un élément de rang n pour tout n si la dimension de E est infinie.

9. On rappelle le théorème de Baire selon lequel dans un espace de Banach toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
En déduire de la question précédente que pour tout espace de Banach de dimension infinie E, il existe un opérateur compact de $K(E, E)$ qui n'est pas de rang fini.
On regarde $F_n(E, E) \subset K(E, E)$, c'est un fermé, montrons qu'il est d'intérieur vide.

   méthode 1 Par l'absurde, sinon, on a $u \in F_n(E, E)$ et $\epsilon > 0$ avec $u + B_{K(E,E)}(0, \epsilon) \subset F_n(E, E)$. Pour $T \in B_{K(E,E)}(0, \epsilon)$ on $T = u + T - u$ DOnc $Im(T) \subset Im(T + u) + Im(u)$ donc $Im(T)$ est de rang au plus $2n$. Il suffit donc de voir qu'il existe un vecteur de rang K=2n+1 pour obtenir une contradiction. Or soient $e_1, ..., e_K$ des vecteurs linéairement indépendants de E,
e_i^* la base duale de $Vect(e_1, ..., e_K)$ et f_i une extension par Hahn-Banach, alors $u(x) = \sum_{i=1}^K f_i(x)e_i$ est linéaire continue par somme finie. $u \in L(E, E)$ et $u(e_i) = e_i$ donc le rang de l'image est K. ce qui donne la contradiction puisque tous les opérateurs compacts ne sont donc pas au plus de rang $2n$.

   méthode 2 Plus explicitement, soit $u(x_1), ..., u(x_k)$ base de l'image, on peut trouver une suite u_m de rang $n+1$ convergeant vers u. On complète par $x_1, ...x_{n+1}$ base d'un sous-espace de E. Soit $e_1^*, ..., e_{n+1}^*$ la base duale, $f_1, ...f_{n+1}$ des prolongement à E.

Soit $y_1, ...y_{n+1}$ base complétant $u(x_1), ..., u(x_k)$
Alors soit

$$u_m = u + \sum_{l=k+1}^{n+1} \frac{1}{m} y_l f_l$$

$u_m(x_i) = u(x_i) + \frac{1}{m} y_i$ pour $i > k$ donc comme $u(x_1), ...u(x_k)$ est une base de l'image, $y_i \in Vect(u_m(x_i), u(x_1), ...u(x_k))$ et donc $y_1, ...y_{n+1} \in Im(u_m)$ donc u_m est de rang $n+1$ et

$$||u_m - u|| \leqslant \sum_{l=k+1}^{n+1} \frac{1}{m} ||y_l|| f_l|| \to_{m\to\infty} 0$$

donc u est dans l'adhérence du complémentaire de $F_n(E, E)$, le complémentaire est donc dense et donc $F_n(E, E)$ est d'intérieure vide.

conclusion

$F_n(E, E)$ est d'intérieur vide dans $K(E, E)$ espace de Banach, donc par le théorème de Baire, l'union $\cup_n F_n(E, E)$ est d'intérieure vide dans $K(E, E)$ donc son complémentaire est dense, donc en particulier il est non vide et contient un opérateur $f \in K(E, E)$ de rang infini.