Feuille de TD 1

Espaces vectoriels normés.

Exercice 1
Vérifier que la fonction $(x,y) \mapsto max(|x+3y|, |x-y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Normes sur les matrices
Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|, \quad |||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que si on identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$:

$$||A||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leqslant 1\},$$

$$|||A|||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leqslant 1\}.$$

2. Montrer que l'on définit ainsi des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $||AB||_\infty \leqslant n||A||_\infty \, ||B||_\infty$ et $|||AB|||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \, |||B|||_\infty$.

Exercice 3
Prouver que $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie. Est-ce que les polynômes forment un ouvert dans E ? Un fermé ?

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel normé (evn). Quels sont les sous-espaces vectoriels F de E qui contiennent une boule ?

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel, et soit $p : E \to [0, \infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \iff x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouver que p est une norme sur E ssi l'ensemble $C = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in]0,1[, x, y \in C, tx + (1-t)y \in C.$$

Exercice 6 Soit Λ une forme linéaire (pas forcément continue) non nulle sur E evn. Prouver que $\Lambda(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ quand V est un ouvert dans E.

Exercice 7 Soit E un e.v.n., et soit L un sous-espace de E de dimension finie. Montrer que L est fermé

Exercice 8 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$, et que l'injection est continue.

Exercice 9 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

1. Montrer que $L^q([0,1], Leb)$ est un sous-espace strict de $L^p([0,1], Leb)$.
2. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R}, Leb)$ et $L^p(\mathbb{R}, Leb)$ (justifier) ?
3. Construire un sous-espace de $L^p([0,1])$ isométrique à $\ell^p(\mathbb{N})$.

Exercice 10 Soit l'application S : $\ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ qui envoie $(x_1, x_2, x_3 ...)$ à $(x_2, x_3, x_4, ...)$ (le shift à gauche).

1. Montrer que S appartient à $L(\ell^p(\mathbb{N}), \ell^p(\mathbb{N}))$, et trouver sa norme d'opérateur.
2. Soit $1 < p < \infty$, en identifiant $(\ell^p(\mathbb{N}))'$ à $\ell^q(\mathbb{N})$ avec $1/p + 1/q = 1$ calculer $S^t \in L(\ell^q(\mathbb{N}), \ell^q(\mathbb{N}))$.
3. Montrer que S^t est une isométrie. S est il une isométrie ?

Exercice 11 Il est clair que $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\ell^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace de c_0. Soit $c := \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{n\to\infty} u_n \text{ existe}\} \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$

1. Est-ce que ce sont des sous-espaces fermés ? denses ?
2. Soit pour $u \in c$, $l(u) = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que l est une forme linéaire continue sur c.
3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, obtenir une forme linéaire $\phi \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ tel que $\phi \notin \ell^1(\mathbb{N})$.
4. Soit $T : c \to c_0$ l'application telle que $T(f) = g$ avec $g(0) = l(f)$ et $g(n) = (f(n-1) - l(f))/2$ pour $n > 1$.
   Montrer que $||T|| \leqslant 1$, T est inversible et $||T^{-1}|| \leqslant 3$.

Exercice 12

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et et $C_b^k(U)$ l'ensemble des fonctions C^k sur U dont les k-premières dérivées sont bornées. On note pour $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!, \partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n} u$. On pose

$$||u||_{C_b^k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Montrer que c'est une norme rendant $C_b^k(U)$ un espace de Banach. De plus montrer que c'est une algèbre de Banach :$\forall f, g \in C_b^k(U), ||fg||_{C_b^k} \leqslant ||f||_{C_b^k}\ ||g||_{C_b^k}$.

Exercice 13 Extension de Tietze-Urysohn

Soit K un compact de X espace métrique. Soit $E = C_b^0(X, \mathbb{R})$ et $p : E \to C^0(K, \mathbb{R})$ l'application de restriction. On va montrer que p est surjective (et un peu mieux).

1. Soit $g \in C^0(K)$ avec $||g||_\infty \leqslant 1$. Soient $K_1 := g^{-1}([1/3, 1])$ et $K_2 := g^{-1}([-1, -1/3])$. Soit :
   $$f(x) = \frac{1}{3}\frac{d(x, K_2) - d(x, K_1)}{d(x, K_2) + d(x, K_1)}, \quad d(x, K_i) := \inf\{d(x, y), y \in K_i\}.$$
   Vérifier que $f \in E, ||f||_\infty \leqslant 1/3$ et $||p(f) - g||_\infty \leqslant \alpha = 2/3$. (on dit que p est presque surjective)
2. En déduire, qu'il existe $F \in E$, $||F||_\infty \leqslant 1$ telle que $p(F) = g$. (Indication : construire une suite f_n par récurrence à partir du résultat précédent)
3. Montrer que p induit une isométrie $E/Ker(p) \simeq C^0(K)$ (on dit que p est une surjection métrique).

Exercice 14 On fixe $1 \leqslant p < \infty$.

Soit $AC^p([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $g \in L^p([a, b], Leb)$ avec :$f(t) = f(a) + \int_a^t g(u)du$.

Le théorème de dérivation de Lebesgue montre alors que g est unique p.p. On pose alors

$$||f||_{AC^p}^p = |f(a)|^p + \int_a^b |g(t)|^p dt.$$

1. Soit $T : f \mapsto (f(a), g) \in \mathbb{R} \oplus_1 L^p([a, b], Leb)$. Montrer que $||T(.)||$ est une norme équivalente sur $AC^p([a, b])$.
2. En déduire que $AC^p([a, b])$ est un espace de Banach.