Correction de la feuille de TD 1
Espaces vectoriels normés.

Exercice 1

Vérifions que la fonction $(x,y) \mapsto max(|x+3y|,|x-y|) = ||A(x,y)||_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. $A(x,y) = (x+3y, x-y)$ est linéaire inversible car $det(A) = -1-3 = -4 \neq 0$. donc par composition de $||.||_\infty$ et A, $||A(.)||_\infty$ est homogène et sous-additif (par linéarité de A) et aussi séparé par invertibilité de A car si $||A(x,y)||_\infty = 0$, $A(x,y) = 0$ donc $(x,y) = 0$.

Exercice 2 Normes sur les matrices

Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|, \quad |||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrons que si on identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$:

$$||A||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leqslant 1\},$$

$$|||A|||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leqslant 1\}.$$

On montre d'abord $\geqslant$ à partir des deux inégalités :

$$||AB||_\infty = \max_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_k| \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}| \sum_{k=1}^{n} |B_k| = ||A||_\infty ||B||_1$$

$$||AB||_\infty = \max_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_k| \leqslant \max_{1 \leqslant i} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \max_{k=1}^{n} |B_k| = |||A|||_\infty ||B||_\infty$$

En prenant $B = e_j$ on voit que $\max_{i=1}^n |A_{ij}|$ est inférieur au sup donc aussi le max sur j ce qui donne la première égalité.
Soit i atteignant le max dans la definition de $|||A|||_\infty$. En prenant $B = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ du signe de A_{ij} qui vérifie $||B||_\infty = 1$, on voit que $||AB||_\infty = \sum_{j=1}^n |A_{ij}| = |||A|||_\infty$ qui est donc inférieur au supremum demandé.

2. $||.||_\infty$ est la norme ∞ usuelle sur $\mathbb{R}^{n^2}$.
$||(A+B)C||_\infty \leqslant ||AC||_\infty + ||BC||_\infty$ donc en passant au sup $|||A+B|||_\infty \leqslant |||A|||_\infty + |||B|||_\infty$. $|||\lambda A|||_\infty = |\lambda| |||A|||_\infty$ est claire sur les deux définitions. Enfin si $|||A|||_\infty = \max_i ||(A_{i,j})_j||_1 = 0$ pour tout i, $||(A_{i,j})_j||_1 = 0$ donc pour tout i, j $A_{i,j} = 0$.
Les deux inégalités sont simples avec les définitions comme sup (en utilisant $||C||_1 \leqslant n||C||_\infty$) :

$$||AB||_\infty = \sup_{||C||_1 \leqslant 1} ||ABC||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \sup_{||C||_1 \leqslant 1} ||BC||_1 \leqslant |||A|||_\infty \sup_{||C||_1 \leqslant 1} n||BC||_\infty \leqslant n||A||_\infty\, ||B||_\infty$$

et

$$|||AB|||_\infty = \sup_{||C||_\infty \leqslant 1} ||ABC||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \sup_{||C||_\infty \leqslant 1} ||BC||_\infty \leqslant |||A|||_\infty\, |||B|||_\infty.$$

Exercice 3

$E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie par exemple car il contient les polynômes et que la famille $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$ est libre (un polynôme qui s'annule sur $[0,1]$ a une infinité de racines donc a tous ces coefficients nuls). Les polynômes ne sont pas ouvert dans E car c'est un sous-espace vectoriel, si il contenait une boule il contiendrait E par homogénéité (cf exo 4). Ce n'est pas un fermé car la limite de $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est une limite uniforme dont la limite n'est pas un polynôme. (On sait même par le théorème de Weierstrass que les polynômes sont denses).

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé (evn). Le seul sous-espace vectoriel F de E qui contient une boule est E car si $B(a,r) \subset F$ par somme $B(0,r) = B(a,r) - a \subset F$ puis par dilatation $E = \cup_n B(0,rn) = \cup_n nB(0,r) \subset F$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel, et soit $p : E \to [0, \infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouvons que p est une norme sur E ssi l'ensemble $C = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in]0,1[, x, y \in C, tx + (1-t)y \in C.$$

Si p est une norme, $t \in]0,1[, x, y \in C$ alors $p(tx+(1-t)y) \leqslant p(tx)+p((1-t)y) = tp(x)+(1-t)p(y)$ (c'est la preuve qu'une boule est convexe utilisant, l'inégalité triangulaire, $t, (1-t) \geqslant 0$ et l'homogénéité.)

Réciproquement si C est convexe, il faut vérifier l'inégalité triangulaire :

Si $p(x) = 0$ ou $p(y) = 0$ comme $x = 0, y = 0$, l'inégalité triangulaire $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ est évidente.

On suppose donc $p(x) \neq 0, p(y) \neq 0$. Soit $t = p(x)/(p(x)+p(y)) < 1$ comme $x/p(x) \in C, y/p(y) \in C$ on déduit par convexité :

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)} = t\frac{x}{p(x)} + (1-t)\frac{y}{p(y)} \in C$$

donc par homogénéité $p(x+y)/(p(x)+p(y)) = p(x+y/(p(x)+p(y)) \leqslant 1$.

Exercice 6 Soit Λ une forme linéaire (pas forcément continue) non nulle sur E evn. Prouvons que $\Lambda(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ quand V est un ouvert dans E.

SOit $x = \Lambda(v) \in \Lambda(V)$ il faut montrer que $\Lambda(B(v,\epsilon))$ est un ouvert pour $B(v,\epsilon) \subset \Lambda$.

Comme $B(v,\epsilon)$ est convexe, il faut montrer que c'est intervalle ouvert il suffit donc de voir pour tout $x \in V$, il existe $\epsilon > 0$ $\Lambda(x) \pm \epsilon \in \Lambda(V)$ (car alors par convexité tout l'intervalle $]\Lambda(x) - \epsilon, \Lambda(x) + \epsilon[\subset \Lambda(V)$ ce qui montre que $\Lambda(V)$ ouvert. Or il existe une boule $B(x,\eta) \subset V$ et si Λ était constante égale à $\Lambda(x)$ elle serait nulle sur $B(0,\eta)$ et aussi sur E par dilatation. donc il existe $y \in B(x,\eta)$ telle que $\Lambda(y) - \Lambda(x) = \pm\epsilon \neq 0$ si $z = x - (y-x)$ on a $||z - x|| = ||y - x||$ donc $z \in B(x,\eta)$ et $\Lambda(z) - \Lambda(x) = \mp\epsilon$ donc quel que soit le signe on a montré $\Lambda(x) \pm \epsilon \in \Lambda(V)$.

Exercice 7 Soit E un e.v.n., et soit L un sous-espace de E de dimension finie. L est complet donc fermé (toute suite convergente est de Cauchy, donc converge dans L qui est la limite dans E)

Exercice 8 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

Si $x \in \ell^p(\mathbb{N}), ||x||_p \leqslant 1$ alors soit $y_n = \frac{x_n}{||x||_p}$. On a $|y_n| \leqslant 1$ car sinon $||y||_p^p \geqslant |y_n| > 1$. Or pour $|x| \leqslant 1$, $|x|^q = exp(q \ln(|x|)) \leqslant exp(p \ln(|x|)) = |x|^p$ car $\ln(|x|) \leqslant 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_n|^q \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |y_n|^p = 1$$

et donc $||x||_q \leqslant ||y||_p$ d'où la continuité de l'injection $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

Exercice 9 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

1. Montrons que $L^q([0,1], Leb)$ est un sous-espace strict de $L^p([0,1], Leb)$. Si $f \in L^q([0,1], Leb)$, par Hölder, avec $1/q = 1/p + 1/r$ donc $r \in [1, \infty$ car $1/r > 0$ et donc
$$||f.1||_q \leqslant ||f||_p ||1||_r$$
Or $||1||_r^r = \int_0^1 1 = 1$. donc $||f||_q \leqslant ||f||_p$ d'où l'inclusion continue.
Par ailleurs, soit $p < r < q$ et $f(x) = x^{1/r}$ de sorte que
$$\int_0^1 f(x)^p dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/r}} dx = [\frac{x^{-p/r+1}}{-p/r+1}]_0^1 = \frac{r}{r-p} < \infty$$
car $p/r < 1$ et
$$\int_0^1 f(x)^q dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{q/r}} dx = [x^{-q/r+1}]_0^1 = \infty$$
donc $f \in L^p([0,1], Leb)$ mais pas dans $L^q([0,1], Leb)$.
2. On ne peut pas comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R}, Leb)$ et $L^p(\mathbb{R}, Leb)$. En restreignant à $[0,1]$ on a vu que $L^p(\mathbb{R}, Leb) \not\subset L^q(\mathbb{R}, Leb)$. Réciproquement $T : (a_n)_{n\geqslant 0} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{]n,n+1]}$ est une isométrie de $\ell^p \to L^p((\mathbb{R}, Leb)$ et donc si on avait l'autre inclusion cela contredirait $\ell^q \not\subset \ell^p$. (car $n^{-1/p} \in \ell^q$ mais pas dans ℓ^p par les séries de Riemann.)
3. Construisons un sous-espace de $L^p([0,1])$ isométrique à $\ell^p(\mathbb{N})$.
On pose
$$T((a_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{(n+1)/p} 1_{]1/2^{n+1}, 1/2^n]}$$
De sorte que l'on a la relation d'isométrie :
$$||T(a_n)||_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} dx |a_n|^p 2^{(n+1)p/p} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p = ||a||_p^p$$

Exercice 10 Soit l'application S : $\ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ qui envoie $(x_0, x_1, x_2 ...)$ à $(x_1, x_2, x_3, ...)$ (le shift à gauche).

1. Il est évident que
$$||S(x)||_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p = ||x||_p$$
donc $S \in L(\ell^p(\mathbb{N}), \ell^p(\mathbb{N}))$, et $|||S||| \leqslant 1$. Enfin $||S(0, x_2, x_3 ...)||_p = ||(0, x_2, x_3 ...)||_p$ ce qui donne$|||S||| = 1$.
2. Soit $1 < p < \infty$, en identifiant $(\ell^p(\mathbb{N}))'$ à $\ell^q(\mathbb{N})$ avec $1/p + 1/q = 1$ calculons $S^t \in L(\ell^q(\mathbb{N}), \ell^q(\mathbb{N}))$.
Par définition pour $x \in \ell^q(\mathbb{N}), y \in \ell^p(\mathbb{N})$
$$\langle S^t(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{k+1} = \langle (0, x_0, x_1, ...,), y \rangle$$
donc $S^t(x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...)$

3. S^t est évidemment une isométrie car :

$$||S^t(x_0, x_1, ...)||_q^q = 0^q + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q = ||(x_0, x_1, ...)||_q^q$$

Mais $S(1, 0, ...) = 0$ donc $||S(1, 0, ...)||_p = 0 \neq 1 = ||(1, 0, ...)||_p$ donc S n'est pas une isométrie.

Exercice 11 Il est clair que $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\ell^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace de c_0 (un série convergente tend vers 0). Soit $c := \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{n\to\infty} u_n \text{ existe}\} \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$

1. Montrons que $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ sont des sous espaces fermés et que $\ell^1(\mathbb{N}) \subset c_0$ est dense. Ce dernier est évident car les suites de supports finis sont denses. Si $x^{(n)} \in c$ et $||x^{(n)} - y||_\infty \to 0$. Donc $||x^{(n)}||_\infty$ est borné. Donc aussi la suite des limites $c^{(n)} = \lim_{m\to\infty} x_m^{(n)}$ donc par compacité, $c^{(n)}$ a une sous-suite convergente $c^{(n_k)} \to C$. Montrons que $y_m \to c$. Soit $\epsilon > 0$, SOit N telle que si $k > N$, $||x^{(n_k)} - y||_\infty \leqslant \epsilon/3$ et $|c^{(n_k)} - C| \leqslant \epsilon/3$.
   Enfin soit M telle que si $m \geqslant M$ alors $|x_m^{(n_k)} - c^{(n_k)}| \leqslant \epsilon/3$, on déduit que :
   $$\sup_{m\geqslant M} |y_m - c| \leqslant ||x^{(n_k)} - y||_\infty + \sup_{m\geqslant M} |x_m^{(n_k)} - c^{(n_k)}| + |c^{(n_k)} - C| \leqslant \epsilon.$$
   donc $(y_m) \in c$ et c est fermé. Le cas où toutes les limites sont 0 dans la preuve précédente montre que la limite de la suite limite doit être 0.
2. Soit pour $u \in c$, $l(u) = \lim_{n\to\infty} u_n$. l est une forme linéaire (évident) continue sur c car
   $$|l(u)| \leqslant ||u||_\infty.$$
3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on obtient une forme linéaire $\phi \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ qui étend l. avec $||\phi|| \leqslant 1$. Montrons que $\phi \notin \ell^1(\mathbb{N})$. Il suffit de voir que pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{N})$ avec $||u||_1 \leqslant 1$, il existe $y \in c$ telle que
   $$|\sum_{k=0}^{\infty} u_k y_k| < |y| := |\lim_{k\to\infty} y_k|.$$
   Notons que
   $$|\sum_{k=0}^{\infty} u_k y_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(y_k - y)| + |y|\ |\sum_{k=0}^{\infty} u_k| \leqslant ||u||_1 ||y_k - y||_\infty + |y|\ |\sum_{k=0}^{\infty} u_k|$$
   Si $|\sum_{k=0}^\infty u_k| < 1$, la solution est évidente, il suffit de prendre $||y_k - y||_\infty < |y|(1 - |\sum_{k=0}^\infty u_k|)$. Si $\sum_{k=0}^\infty u_k = 1$ (à un nombre complexe de module 1 prêt)
   $$\sum_{k=0}^{\infty} u_k y_k = y + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y_k - y).$$
   Comme $u \neq 0$ et $\ell^1(\mathbb{N}) = (c_0(\mathbb{N}))'$ il existe $z \in c_0$ telle que $u(z) = -y/2$ (par exemple on prend k tel que $u_k \neq 0$ et $z_k = -y/2u_k$ et $z_i = 0$ si $i \neq k$). On prend $(y_k - y) = z_k$ pour que $\sum_{k=0}^\infty u_k y_k = y/2$.
4. Soit $T : c \to c_0$ l'application telle que $T(f) = g$ avec $g(0) = l(f)$ et $g(n) = (f(n-1) - l(f))/2$ pour $n > 1$. D'abord $g(n) \to 0$ car $f(n) \to l(f)$ donc $g \in c_0$.
   Comme $|l(f)| \leqslant ||f||_\infty$ et $|(f(n-1) - l(f))/2| \leqslant |f(n-1)|/2 + |l(f)|/2 \leqslant ||f||_\infty$, on obtient $||T(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$
   On a donc $|||T||| \leqslant 1$.
   Construison l'inverse de T. $T(f) = g$ implique $f(n) = 2g(n+1) + g(0) =: [T^{-1}(g)](n)$ d'où $||T^{-1}(g)||_\infty \leqslant 3||g||_\infty$.

Exercice 12

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et et $C_b^k(U)$ l'ensemble des fonctions C^k sur U dont les k-premières dérivées sont bornées. On note pour $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$,$\partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n} u$. On pose

$$||u||_{C_b^k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha u(x)|.$$

L'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont faciles (cf. TD.) et si $||u||_{C_b^k} = 0$ alors $sup_{x \in U}|u(x)| = 0$ (cas $\alpha = (0, ..., 0)$) donc $u = 0$ d'où la séparation.

Montrons que $C_b^k(U)$ un espace de Banach. Si u_n est Cauchy on remarque que $u_n^\alpha := \partial^\alpha u_n$ sont de Cauchy dans $C_b^0(U)$. Donc, comme cet espace est complet (cf. cours) $u_n^\alpha \to u^\alpha$ uniformément. Il reste à montrer que que l'on a existence des dérivées partielles et $\partial^\alpha u(x) = u^\alpha$. Or c'est un résultat classique que si toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ convergent uniformément la fonction limite est C^k et on peut intervertir limite et dérivée. Ceci conclut.

Montrons que c'est une algèbre de Banach :$\forall f, g \in C_b^k(U), ||fg||_{C_b^k} \leqslant ||f||_{C_b^k} \, ||g||_{C_b^k}$.

On rappelle la formule de Leibniz :

$$\partial^\gamma(fg) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} \partial^\alpha(f)\partial^\beta(g)$$

d'où

$$\begin{aligned}
||fg||_{C_b^k} &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| \leqslant k} \frac{1}{\gamma!} || \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} \partial^\alpha(f)\partial^\beta(g))||_\infty \\
&\leqslant \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| \leqslant k} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{1}{\alpha!\beta!} ||\partial^\alpha(f)||_\infty ||\partial^\beta(g))||_\infty \leqslant ||f||_{C_b^k} \, ||g||_{C_b^k}.
\end{aligned}$$

Exercice 13 Extension de Tietze-Urysohn

Soit K un compact de X espace métrique. Soit $E = C_b^0(X, \mathbb{R})$ et $p : E \to C^0(K, \mathbb{R})$ l'application de restriction. On va montrer que p est surjective (et un peu mieux).

1. Soit $g \in C^0(K)$ avec $||g||_\infty \leqslant 1$. Soient $K_1 := g^{-1}([1/3, 1])$ et $K_2 := g^{-1}([-1, -1/3])$. Soit :

$$f(x) = \frac{1}{3} \frac{d(x, K_2) - d(x, K_1)}{d(x, K_2) + d(x, K_1)}, \quad d(x, K_i) := \inf\{d(x, y), y \in K_i\}.$$

Vérifions que $f \in E, ||f||_\infty \leqslant 1/3$ et $||p(f) - g||_\infty \leqslant \alpha = 2/3$. (on dit que p est presque surjective)

f est continue car $d(., K_i)$ est continue et le dénominateur est non nul car $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ et $d(., K_i) > 0$ sur K_i^c.

Or

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{3} \frac{d(x, K_2) + d(x, K_1)}{d(x, K_2) + d(x, K_1)} = \frac{1}{3}$$

donc f est bornée et $|f||_\infty \leqslant 1/3$.

$$\begin{aligned}
&|p(f) - g| = 1_{K_1}|(\frac{1}{3} - g| + 1_{K_2}| - \frac{1}{3} - g| + (1_K - 1_{K_1} - 1_{K_2})|f - g| \\
&\leqslant 1_{K_1}||1_{K_1}(\frac{1}{3} - g)||_\infty + 1_{K_2}||1_{K_1}(-\frac{1}{3} - g)||_\infty + (1_K - 1_{K_1} - 1_{K_2})(||f||_\infty + ||g(1_K - 1_{K_1} - 1_{K_2})||_\infty
\end{aligned}$$

et tous les termes sont inférieurs à 2/3 par définition.

2. Déduisons qu'il existe $F \in E$, $||F||_\infty \leqslant 1$ telle que $p(F) = g$. On construit construire une suite f_n par récurrence à partir du résultat précédent telle que $f_n = F_0 + ... + F_n$

$$\sum_{k=0}^{n} ||F_k||_\infty \leqslant \frac{1}{3}(1 + ... + \frac{2^n}{3^n})$$

et

$$||p(f_n) - g||_\infty \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

On prend $f_0 = F_0 = f$ donné par 1 à partir de g. On prend $F_n/||p(f_{n-1}) - g||_\infty$ donné par 1 à partir de $-[p(f_{n-1}) - g]/||p(f_{n-1}) - g||_\infty$ (si le dénominateur est 0 on s'arrête et on prend la suite constante).
Donc on a les deux inégalités

$$||F_n||_\infty \leqslant \frac{1}{3}||p(f_{n-1}) - g||_\infty \leqslant \frac{1}{3}\frac{2^n}{3^n}$$

et

$$||p(F_n) + p(f_{n-1}) - g||_\infty \leqslant \frac{2}{3}||p(f_{n-1}) - g||_\infty \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

La deuxième inégalité donne $||p(f_n) - g||_\infty \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$. La première inégalité suit par l'hypothèse de récurrence. $\sum F_n$ est donc absolument convergente dans E par complétude, donc soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n = \lim f_n$. En passant à la limite on obtient

$$||F||_\infty \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

et $||p(F) - g||_\infty = 0$.

3. Montrons que p induit une isométrie $\overline{p} : E/Ker(p) \simeq C^0(K)$ (on dit que p est une surjection métrique). Comme p est une contraction, c'est aussi le cas de $\overline{p}$ (cf cours). De plus si $p(f) = g$ en prenant F par (2) avec $||F|| = ||g||$ et $p(F) = g = p(f)$ on a $h = F - f \in Ker(p)$ donc

$$||\dot{f}||_{E/Ker(p)} = \inf_{h \in Ker(p)} ||f + h||_\infty \leqslant ||F||_\infty = ||g|| = ||p(f)||_\infty = ||\overline{p}(\dot{f})||_\infty$$

d'où $||x|| \leqslant ||\overline{p}(x)||$ pour $x \in E/Ker(p)$.

Exercice 14 On fixe $1 \leqslant p < \infty$.

Soit $AC^p([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $g \in L^p([a, b], Leb)$ avec :$f(t) = f(a) + \int_a^t g(u)du$.

Le théorème de dérivation de Lebesgue montre alors que g est unique p.p. On pose alors

$$||f||_{AC^p}^p = |f(a)|^p + \int_a^b |g(t)|^p dt.$$

1. Soit $T : f \mapsto (f(a), g) \in \mathbb{R} \oplus_1 L^p([a, b], Leb)$. Montrer que $||T(.)||$ est une norme équivalente sur $AC^p([a, b])$.
Explicitement comme pour $a, b > 0$, $(a + b)^p \geqslant a^p + b^p \geqslant \max(a, b)^p \geqslant (\frac{a+b}{2})^p$

$$||f||_{AC^p} \leqslant ||T(f)|| = |f(a)| + (\int_a^b |g(t)|^p dt)^{1/p} \leqslant 2^p ||f||_{AC^p}.$$

2. Déduisons que $AC^p([a, b])$ est un espace de Banach. On a dit en cours que la somme $\oplus_1$ d'espaces de Banach est un espace de Banach.
Si on veut le justifier directement, on prend f_n de Cauchy dans $AC^p([a, b])$ donc $T(f_n) = (f_n(a), g_n)$. $(f_n(a))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge disons vers A. g_n de Cauchy dans $L^p([a, b], Leb)$ qui est complet d'après le cours, donc g_n converge vers g. On voit que $f(t) = A + \int_a^t g(u)du$ définit une fonction de AC_p. De plus

$$||f - f_n||_{AC^p}^p = |f(a) - A|^p + ||g_n - g||_p^p \to 0.$$