
Correction de la feuille de TD 1
Espaces vectoriels normés.

Exercice 1

Vérifions que la fonction $(x,y) \mapsto max(|x+3y|, |x-y|) = ||A(x,y)||_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. $A(x,y) = (x+3y, x-y)$ est linéaire inversible car $det(A) = -1-3 = -4 \neq 0$. donc par composition de $||.||_\infty$ et A, $||A(.)||_\infty$ est homogène et sous-additif (par linéarité de A) et aussi séparé par invertibilité de A car si $||A(x,y)||_\infty = 0$, $A(x,y) = 0$ donc $(x,y) = 0$.

Exercice 2 Normes sur les matrices

Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|, \quad |||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrons que si on identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$:

$$||A||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leqslant 1\},$$

$$|||A|||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leqslant 1\}.$$

On montre d'abord $\geqslant$ à partir des deux inégalités :

$$||AB||_\infty = \max_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_k| \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}| \sum_{k=1}^{n} |B_k| = ||A||_\infty ||B||_1$$

$$||AB||_\infty = \max_{i=1}^{n} |\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_k| \leqslant \max_{1 \leqslant i} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \max_{k=1}^{n} |B_k| = |||A|||_\infty ||B||_\infty$$

En prenant $B = e_j$ on voit que $\max_{i=1}^n |A_{ij}|$ est inférieur au sup donc aussi le max sur j ce qui donne la première égalité.
Soit i atteignant le max dans la definition de $|||A|||_\infty$. En prenant $B = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ du signe de A_{ij} qui vérifie $||B||_\infty = 1$, on voit que $||AB||_\infty = \sum_{j=1}^n |A_{ij}| = |||A|||_\infty$ qui est donc inférieur au supremum demandé.

2. $||.||_\infty$ est la norme ∞ usuelle sur $\mathbb{R}^{n^2}$.
$||(A+B)C||_\infty \leqslant ||AC||_\infty + ||BC||_\infty$ donc en passant au sup $|||A+B|||_\infty \leqslant |||A|||_\infty + |||B|||_\infty$. $|||\lambda A|||_\infty = |\lambda| |||A|||_\infty$ est claire sur les deux définitions. Enfin si $|||A|||_\infty = \max_i ||(A_{i,j})_j||_1 = 0$ pour tout i, $||(A_{i,j})_j||_1 = 0$ donc pour tout i,j $A_{i,j} = 0$.
Les deux inégalités sont simples avec les définitions comme sup (en utilisant $||C||_1 \leqslant n||C||_\infty$) :

$$||AB||_\infty = \sup_{||C||_1 \leqslant 1} ||ABC||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \sup_{||C||_1 \leqslant 1} ||BC||_1 \leqslant |||A|||_\infty \sup_{||C||_1 \leqslant 1} n||BC||_\infty \leqslant n||A||_\infty \, ||B||_\infty$$

et

$$|||AB|||_\infty = \sup_{||C||_\infty \leqslant 1} ||ABC||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \sup_{||C||_\infty \leqslant 1} ||BC||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \; |||B|||_\infty.$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel, et soit $p : E \to [0, \infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouvons que p est une norme sur E ssi l'ensemble $C = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in]0,1[, x, y \in C, tx + (1-t)y \in C.$$

Si p est une norme, $t \in]0,1[, x, y \in C$ alors $p(tx+(1-t)y) \leqslant p(tx)+p((1-t)y) = tp(x)+(1-t)p(y)$ (c'est la preuve qu'une boule est convexe utilisant, l'inégalité triangulaire, $t, (1-t) \geqslant 0$ et l'homogénéité.)

Réciproquement si C est convexe, il faut vérifier l'inégalité triangulaire :

Si $p(x) = 0$ ou $p(y) = 0$ comme $x = 0, y = 0$, l'inégalité triangulaire $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ est évidente.

On suppose donc $p(x) \neq 0, p(y) \neq 0$. Soit $t = p(x)/(p(x)+p(y)) < 1$ comme $x/p(x) \in C, y/p(y) \in C$ on déduit par convexité :

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)} = t\frac{x}{p(x)} + (1-t)\frac{y}{p(y)} \in C$$

donc par homogénéité $p(x+y)/(p(x)+p(y)) = p(x+y/(p(x)+p(y)) \leqslant 1$.

Exercice 4 Soit Λ une forme linéaire (pas forcément continue) non nulle sur E evn. Prouvons que $\Lambda(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ quand V est un ouvert dans E.

SOit $x = \Lambda(v) \in \Lambda(V)$ il faut montrer que $\Lambda(B(v,\epsilon))$ est un ouvert pour $B(v,\epsilon) \subset \Lambda$.

Comme $B(v,\epsilon)$ est convexe, il faut montrer que c'est intervalle ouvert il suffit donc de voir pour tout $x \in V$, il existe $\epsilon > 0$ $\Lambda(x) \pm \epsilon \in \Lambda(V)$ (car alors par convexité tout l'intervalle $]\Lambda(x) - \epsilon, \Lambda(x) + \epsilon[\subset \Lambda(V)$ ce qui montre que $\Lambda(V)$ ouvert. Or il existe une boule $B(x,\eta) \subset V$ et si Λ était constante égale à $\Lambda(x)$ elle serait nulle sur $B(0,\eta)$ et aussi sur E par dilatation. donc il existe $y \in B(x,\eta)$ telle que $\Lambda(y) - \Lambda(x) = \pm\epsilon \neq 0$ si $z = x - (y-x)$ on a $||z-x|| = ||y-x||$ donc $z \in B(x,\eta)$ et $\Lambda(z) - \Lambda(x) = \mp\epsilon$ donc quel que soit le signe on a montré $\Lambda(x) \pm \epsilon \in \Lambda(V)$.

Exercice 5 Soit E un e.v.n., et soit L un sous-espace de E de dimension finie. L est complet donc fermé (toute suite convergente est de Cauchy, donc converge dans L qui est la limite dans E)

Exercice 6 **Transformée de Fourier** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, Leb)$ une fonction intégrable. On note $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ le produit scalaire usuel.

1. Pour montrer que la fonction suivante est bien définie

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x) dx,$$

Il suffit de noter que $e^{-i\langle \xi, x\rangle}$ continue donc mesurable donc par produit $x \mapsto e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)$ ùmesurable et $|e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)| \leqslant |f(x)|$ qui donne une domination montrant l'intégrabilité.

2. Montrons que $\hat{f}$ et continue sur $\mathbb{R}^n$. par le théorème de coontinuité avec condition de domination obtenue au 1. comme $\xi \mapsto e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)$ est continue pour tout x, les hypothèses sont vérifiées et le théorème conclut.

3. Montrer que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini, ce qui revient pour ξ_n tel que $||\xi_n|| \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi_n) = 0$. On commence par le cas $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Fixons j tel que $\xi_{n,j} \to \infty$ Par intégration par partie

$$\hat{f}(\xi_n) = \frac{1}{-i\xi_{n,j}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i\langle \xi_n, x\rangle} f(x) dx = \frac{1}{i\xi_{n,j}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi_n, x\rangle} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) dx,$$

Donc

$$|\hat{f}(\xi_n)| \leqslant \frac{1}{|\xi_{n,j}|} Leb(\mathrm{Supp}(f)) ||\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)||_\infty dx \to_{n\to\infty} 0.$$

Reste le cas general, soit par densité, $g \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $||g-f||_1 \leqslant \epsilon$,

$$\limsup_{n\to\infty} |\hat{f}(\xi_n)| \leqslant \limsup_{n\to\infty} |f \hat{-} g(\xi_n)| + |\hat{g}(\xi_n)| \leqslant ||g-f||_1 \leqslant \epsilon$$

et comme $\epsilon > 0$ arbitraire, la limite vaut 0.

Exercice 7

Montrons l'inégalité de Minkowski en utilisant celle de Hölder, à savoir, si $f, g \in L^p(\Omega, \mu, \mathcal{T})$, $1 < p < \infty$ alors $||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$.

On écrit par l'inégalité triangulaire

$$||f+g||_p^p = \int |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \leqslant \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu$$

de plus par Hölder, comme $|f+g|^{p-1} \in L^q(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ avec $q = p/p-1$ qui vérifie $1/q + 1/p = p - 1/p + 1/p = 1$, on a :

$$\int |f||f+g|^{p-1} d\mu \leqslant ||f||_p|| \, |f+g|^{p-1}||_q = ||f||_p||f+g||_p^{p/q} = |f||_p|| \, |f+g|||_p^{p-1}.$$

En raisonnant de même pour g, on obtient :

$$||f+g||_p^p = \leqslant ||f||_p||f+g||_p^{p-1} + ||g||_p||f+g||_p^{p-1}$$

.

Comme le résultat est évident si $f+g=0$, on peut diviser par $||f+g||_p^{p-1}$ et conclure.

Exercice 8 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

Si $x \in \ell^p(\mathbb{N}), ||x||_p \leqslant 1$ alors soit $y_n = \frac{x_n}{||x||_p}$. On a $|y_n| \leqslant 1$ car sinon $||y||_p^p \geqslant |y_n| > 1$. Or pour $|x| \leqslant 1$, $|x|^q = exp(q \ln(|x|)) \leqslant exp(p \ln(|x|)) = |x|^p$ car $\ln(|x|) \leqslant 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_n|^q \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |y_n|^p = 1$$

et donc $||x||_q \leqslant ||y||_p$ d'où la continuité de l'injection $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

Exercice 9 Soit $1 \leqslant p < +\infty, 1 \leqslant q \leqslant +\infty$.

1. Soit $\alpha > 0$, $f(x) = (1 + ||x||_2)^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}^d$. Pour quel p a-t-on $f \in L^p(\mathbb{R}^d, Leb)$? en passant en coordonnées polaires

$$\int |f(x)|^p dx = C_d \int_0^\infty r^{d-1} dr (1+r)^{-\alpha p} \leqslant C_d \int_0^1 r^{d-1} dr + C_d \int_1^\infty r^{d-1-\alpha p} dr$$

donc si $d - 1 - \alpha p < -1$ soit $\alpha p > d$, l'intégrale est convergente. Réciproquement,

$$\int |f(x)|^p dx = C_d \int_0^\infty r^{d-1} dr (1+r)^{-\alpha p} \geqslant C_d \int_1^\infty (1+r)^{d-1} (1+r)^{-\alpha p} \frac{r^{d-1}}{(1+r)^{d-1}} dr \geqslant C_d \frac{1}{2^d} \int_2^\infty (r)^{d-}$$

dés que $d - 1 - \alpha p \geqslant -1$ soit $\alpha p \leqslant d$.

DOnc $f \in L^p(\mathbb{R}^d, Leb)$ si et seulement si $p > d/\alpha$. En particulier pour $\alpha > d$, $d/\alpha < 1$ et donc f est dans tous les $L^p, p \geqslant 1$.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $L^1(\Omega, Leb) \cap L^\infty(\Omega, Leb)$ est dense dans $L^p(\Omega, Leb)$ pour $p < \infty$

Il suffit d'approcher $f \geqslant 0$ (en faisant une combinaison linéaire finie) dans $L^p(\Omega, Leb)$ on prend $f_n(x) = \sum_{k=0}^{4^n} \frac{k}{2^n} 1_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(f(x)) \leqslant f$. Par définition $f_n \to f$ p.p. $||f_n||_\infty \leqslant 2^n$ donc $f_n \in L^\infty(\Omega, Leb)$ et

$$||f_n||_1 \leqslant \sum_{k=0}^{4^n} \frac{k}{2^n} Leb(f^{-1}([k/2^n,(k+1)/2^n[)$$

Or (inégalité de Markov) $Leb(f^{-1}([k/2^n,(k+1)/2^n[) \leqslant Leb(f^{-1}([k/2^n,+\infty[) \leqslant \frac{1}{k^p/2^{np}} \int_{f^{-1}([k/2^n,+\infty[)} |f|^p \leqslant \frac{||f||_p^p}{k^p/2^{np}} < \infty$, donc $||f_n||_1 < \infty$.
DOnc $f_n \in L^1(\Omega, Leb) \cap L^\infty(\Omega, Leb)$.
Il reste à voir que $||f_n - f||_p \to 0$. Or on a vu que $|f_n - f|^p \to 0$ p;p. et on a la domination, $|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2|f|)^p$ d'où par TCD, on obtient $||f_n - f||_p \to 0$

3. Montrons que $B = \{f \in L^p(\Omega, Leb) : ||f||_q \leqslant 1\}$ est fermé dans $L^p(\Omega, Leb)$.
SOit $f_n \in B$ et $f \in L^p(\Omega, Leb)$ tel que $||f_n - f||_p \to 0$. On veut montrer que $f \in B$.
Cas $p \geqslant q$. Or $L^p(A, Leb) \subset L^q(A, Leb)$ si $p \geqslant q$ car par Holder si $1/q = 1/p + 1/r$, $||1_A f_n - 1_A f||_q \leqslant ||1_A f_n - 1_A f||_p Leb(A)^{1/r} \to 0$ donc $||1_A f||_q \leqslant 1$ et par convergence monotone en prenant A_n, avec $\cup A_n = \Omega$, on a $||f||_q \leqslant 1$ donc $f \in B$
Cas $p < q < \infty$. SOit $p < r < q$, alors par Holder comme $r = tp + (1-t)q$, $0 < t < 1$

$$||f_n - f_m||_r^r = \int |f_n - f_m|^{tp} |f_n - f_m|^{(1-t)q} \leqslant |||f_n - f_m|^{tp}||_{1/t} |||f_n - f_m|^{(1-t)q}||_{1/(1-t)} = ||f_n - f_m||_p^{tp} ||f_n -$$

pour $n, m \to \infty$ donc f_n est de Cauchy dans L^r. Elle a donc une limie F dans L^r mais comme une sous-suite converge p.p. vers F et une sous-sous-suite vers f, $f = F$ et $||f_n||_r \to ||f||_r$.
Or par la mˆême borne $||f_n||_r \leqslant (\sup_n ||f_n||_p)^{tp} ||f_n||_q^{(1-t)q} \leqslant (\sup_n ||f_n||_p)^{tp}$ donc en passant à la limite $||f||_r \leqslant (\sup_n ||f_n||_p)^{tp}$.
En prenant $t \to 0$, la borne devient 1 il reste donc a voir que $||f||_r \to ||f||_q$ pour obtenir en passant à la limite que $||f||_q \leqslant 1$. ON ne montre pas tout à fait cela.
En fait pour A de mesure de Lebesgue finie on obtient la même borne pour $||1_A f||_r$ donc il suffit de montrer que $||1_A f||_r \to_{t \to 0} ||1_A f||_q$ pour avoir $||1_A f||_q \leqslant 1$ et ensuite par convergence dominée $||f||_q \leqslant 1$.
Or $|1_A f|^r = 1_A |f|^r \leqslant 1_A \max(1, |f|^r) \leqslant 1_A \max(1, |f|^q)$ Donc par convergence monotone $\int 1_A \max(1, |f|^r) \to \int 1_A \max(1, |f|^q)$ or $\int 1_A \max(1, |f|^r) \leqslant Leb(A) + ||f||_r^r$ borné donc $\int 1_A \max(1, |f|^q) \leqslant Leb(A) + 1$. DOnc $1_A \max(1, |f|^q) \in L^1$ qui donne une domination pour $|1_A f|^r$ qui converge pour $r \to q$ vers $|1_A f|^q$ donc par TCD $||1_A f||_r \to_{t \to 0} ||1_A f||_q$ ce qui conclut.
Autre méthode pour voir directement $||f||_r \to ||f||_q$ dans le cas $q < \infty$. Il suffit de voir $||f||_r^r \to ||f||_q^q$ on décompose $||f||_r^r = \int_{|f| \leqslant 1} |f|^r + \int_{|f|>1} |f|^r$ sur $|f| > 1$ $|f|^r \to |f|^q$ en croissant avec r croissant vers q d'où par convergence monotone $\int_{|f|>1} |f|^r \to \int_{|f|>1} |f|^q$. Comme $|f|^p 1_{|f| \leqslant 1} \in L^1$ on domine $|f|^r 1_{|f| \leqslant 1} \leqslant |f|^p 1_{|f| \leqslant 1}$ pour $r \geqslant p$ et on déduit par convergence dominée $\int_{|f| \leqslant 1} |f|^r \to_{r \to q} \int_{|f| \leqslant 1} |f|^q$ donc en sommant $||f||_r^r \to ||f||_q^q$ pour r croissant vers q. avec $f \in L^p, p < r$.
Si $q = \infty$, On utilise qu'il existe $f_{n_k} \to f$ p.p. Si $Leb(A) < \infty$ $1_A f_{n_k} \to 1_A f$ p.p. et $||1_A f_{n_k}||_q \leqslant ||f_{n_k}||_q \leqslant 1$. On a $|f_{n_k}| \leqslant 1 + \epsilon$ p.p. comme le nombre de condition est dénombrable on a ce résultat p.p. pour tout k et en passsant à la limite $|f| \leqslant 1 + \epsilon$ p.p., donc $||f||_\infty \leqslant 1 + \epsilon$ et en prenant $\epsilon \to 0$,$||f||_\infty \leqslant 1$.

Exercice 10 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

1. Montrons que $L^q([0,1],Leb)$ est un sous-espace strict de $L^p([0,1],Leb)$. Si $f \in L^q([0,1],Leb)$, par Hölder, avec $1/q = 1/p + 1/r$ donc $r \in [1,\infty$ car $1/r > 0$ et donc
$$||f.1||_q \leqslant ||f||_p ||1||_r$$
Or $||1||_r^r = \int_0^1 1 = 1$. donc $||f||_q \leqslant ||f||_p$ d'où l'inclusion continue.
Par ailleurs, soit $p < r < q$ et $f(x) = x^{1/r}$ de sorte que
$$\int_0^1 f(x)^p dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/r}} dx = [\frac{x^{-p/r+1}}{-p/r+1}]_0^1 = \frac{r}{r-p} < \infty$$
car $p/r < 1$ et
$$\int_0^1 f(x)^q dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{q/r}} dx = [x^{-q/r+1}]_0^1 = \infty$$
donc $f \in L^p([0,1],Leb)$ mais pas dans $L^q([0,1],Leb)$.
2. On ne peut pas comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R},Leb)$ et $L^p(\mathbb{R},Leb)$. En restreignant à $[0,1]$ on a vu que $L^p(\mathbb{R},Leb) \not\subset L^q(\mathbb{R},Leb)$. Réciproquement $T : (a_n)_{n\geqslant 0} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{]n,n+1]}$ est une isométrie de $\ell^p \to L^p((\mathbb{R},Leb)$ et donc si on avait l'autre inclusion cela contredirait $\ell^q \not\subset \ell^p$. (car $n^{-1/p} \in \ell^q$ mais pas dans ℓ^p par les séries de Riemann.)
3. Construisons un sous-espace de $L^p([0,1])$ isométrique à $\ell^p(\mathbb{N})$.
On pose
$$T((a_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{(n+1)/p} 1_{]1/2^{n+1},1/2^n]}$$
De sorte que l'on a la relation d'isométrie :
$$||T(a_n)||_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} dx |a_n|^p 2^{(n+1)p/p} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p = ||a||_p^p$$

Exercice 11 (cf TD)

Exercice 12

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et et $C_b^k(U)$ l'ensemble des fonctions C^k sur U dont les k-premières dérivées sont bornées. On note pour $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!, \partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n} u$. On pose
$$||u||_{C_b^k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x\in U} |\partial^\alpha u(x)|.$$
L'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont faciles (cf. TD.) et si $||u||_{C_b^k} = 0$ alors $sup_{x\in U}|u(x)| = 0$ (cas $\alpha = (0,...,0)$) donc $u = 0$ d'où la séparation.

Montrons que $C_b^k(U)$ un espace de Banach. Si u_n est Cauchy on remarque que $u_n^\alpha := \partial^\alpha u_n$ sont de Cauchy dans $C_b^0(U)$. Donc, comme cet espace est complet (cf. cours) $u_n^\alpha \to u^\alpha$ uniformément. Il reste à montrer que que l'on a existence des dérivées partielles et $\partial^\alpha u(x) = u^\alpha$. Or c'est un résultat classique que si toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ convergent uniformément la fonction limite est C^k et on peut intervertir limite et dérivée. Ceci conclut.

Montrons que c'est une algèbre de Banach :$\forall f, g \in C_b^k(U), ||fg||_{C_b^k} \leqslant ||f||_{C_b^k} ||g||_{C_b^k}$.

On rappelle la formule de Leibniz :
$$\partial^\gamma(fg) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} \partial^\alpha(f)\partial^\beta(g)$$

d'où

$$\begin{aligned}||fg||_{C_b^k} &= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n,|\gamma|\leqslant k} \frac{1}{\gamma!}|| \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!}\partial^\alpha(f)\partial^\beta(g))||_\infty \\ &\leqslant \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n,|\gamma|\leqslant k} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{1}{\alpha!\beta!}||\partial^\alpha(f)||_\infty||\partial^\beta(g))||_\infty \leqslant ||f||_{C_b^k}\ ||g||_{C_b^k}.\end{aligned}$$

Exercice 13 Convolution Soit $f \in L^1(\Omega,\mu,\mathcal{T}), g \in L^p(\Omega,\mu,\mathcal{T}), h \in L^q(\Omega,\mu,\mathcal{T})$ avec $1/p+1/q=1$,

1. Soit $\check{f}(x) = \overline{f}(-x)$. Montrons que :

$$\int \overline{(f*g)}h = \int \overline{g}(\check{f}*h).$$

Si p=1 ou q=1, on a

$$\int dxdy|f(x-y)||g(y)|h(x)| \leqslant ||f||_1||g||_p||h||_q$$

de sorte que la fonctions sous l'intégrale est intégrable et par Fubini, on peut intervertir les intégrales en x et y ci-dessous :

$$\int dx\overline{(f*g)}(x)h(x) = \int dx \int dy\overline{f}(x-y)\overline{g}(y)h(x) = \int dy\overline{g}(y) \int dx\overline{f}(x-y)h(x) = \int dy\overline{g}(y)(\check{f}*h)$$

Dans le cas $1<p<\infty$, on étend par densité de $L^1\cap L^\infty$dans L^p et L^q (exo 9). En effet, les 2 côtés de l'égalités sont linéaires en g et h, donc les inégalités suivantes montrent qu'ils sont aussi continues :

$$\begin{aligned}&|\int dx\overline{(f*g)}(x)h(x)| \leqslant ||f*g||_p||h||q \leqslant ||f||_1||g||_p||h||_q;\\ &|\int dy\overline{g}(y)(\check{f}*h)(y)| \leqslant ||g||_p||\check{f}*h||q \leqslant ||f||_1||g||_p||h||_q.\end{aligned}$$

2. Montrer que si $p=1$, $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$. Comme la fonction $(x,y)\mapsto f(x-y)g(y)$ est dans L^1 (de norme inférieur à $||f||_1||g||_1$), on applique Fubini à la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) &= \int dx \int dy e^{i\langle x-y+y,\xi\rangle} f(x-y)g(y)\\ &= \int dyg(y)e^{i\langle y,\xi\rangle}\int dxe^{i\langle x-y,\xi\rangle}f(x-y)\\ &= \int dyg(y)e^{i\langle y,\xi\rangle}\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

avec l'avant dernière égalité par invariance de la mesure de Lebesgue par translation.

Exercice 14 Suites régularisantes Soit ρ_n une suite régularisante et $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que pour tout compact $K\subset\mathbb{R}^n$: On a

$$\sup_{x\in K}|(\rho_n*f)(x)-f(x)| \leqslant \sup_{x\in K}|\int \rho_n(y)f(x-y)-f(x)| \leqslant \int \rho_n(y) \sup_{x\in K,y\in B(0,1/n)}|f(x-y)-f(x)| \to_{n\to}$$

en utilisant, l'uniforme coninuité de f, pour avoir $\omega_f(1/n) = \sup_{x\in K,y\in B_F(0,1/n)}|f(x-y)-f(x)| \to_{n\to\infty} 0$.

2. En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $||.||_\infty$ induite par $C_b^0(\mathbb{R}^n)$.

   On a vu en cours que $(\rho_n * f) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et son support est inclus dans $supp(f) + B_F(0, 1/n) \subset supp(f) + B_F(0,1) = K$ qui est conpacte, donc

$$||(\rho_n * f)(x) - f||_\infty = \sup_{x \in K} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \to 0.$$

3. Montrons que l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ est

$$C_0^0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b^0(\mathbb{R}^n) : \lim_{||x|| \to \infty} |f(x)| = 0\}.$$

   MOntrons que $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ est fermé de sorte que comme $C_0^0(\mathbb{R}^n) \supset C_c^0(\mathbb{R}^n)$, on a aussi $C_0^0(\mathbb{R}^n) \supset \overline{C_c^0(\mathbb{R}^n)}$. En effet si $f_n \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, $||f_n - f||_\infty \to 0$, on prend $\epsilon > 0$ et n tel que $||f_n - f||_\infty \leqslant \epsilon/2$, M tel que si $||x|| \geqslant M, |f_n(x)| \leqslant \epsilon/2$ et on déduit pour $||x|| \geqslant M, |f(x)| \leqslant ||f_n - f||_\infty + |f_n(x)| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, donc $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, d'où la fermeture.

   Réciproquement, on montre que $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ par troncation. SOit $\chi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ avec $\chi(x) = 1$ si $x \in B(0,1)$ $\chi(x) = 0$ si $||x|| \geqslant 2$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ (par exemple par le lemme d'urysohn avec $K = B_F(0,1), V = B(0,2)$, on peut aussi prendre la formule $\chi(x) = \max(0, 1 - ||x - x/||x||||))$, $\chi(0) = 1$).

   ON pose $\chi_n(x) = \chi(x/n)$, $\chi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ et on prend $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ Montrons que $||\chi_n f - f||_\infty \to 0$, or

$$||\chi_n f - f||_\infty = \sup_{||x|| \geqslant n} |(\chi_n f - f)(x)| \leqslant 2 \sup_{||x|| \geqslant n} |f(x)| \to_{n \to \infty} 0$$

   car $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 15 Inégalité d'Young Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n, Leb), g \in L^q(\mathbb{R}^n, Leb), 1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, 1 \leqslant r \leqslant \infty$ avec $1/r = 1/p + 1/q - 1 \geqslant 0$, p', q' les exposants conjugués,

1. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable (indication : en écrivant $|f(x-y)|^{p/q'}|g(y)|^{q/p'}(|f(x-y)|^{1-p/q'}|g(y)|^{1-q/p'})$).
2. On pose $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy f(x-y)g(y)$, montrer que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n, Leb)$ et $||f * g||_r \leqslant ||f||_p ||g||_q$.
3. Montrer que si $r = \infty$ alors $f * g \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ et si $1 < p < \infty$, $(f * g)(x) \to_{|x| \to \infty} 0$.