
Feuille de TD 1

Espaces vectoriels normés, Intégration.

Exercice 1

Vérifier que la fonction $(x, y) \mapsto max(|x + 3y|, |x - y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Normes sur les matrices

Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|, \quad |||A|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que :

$$||A||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |B_i| \leqslant 1\},$$

$$|||A|||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in \mathbb{R}^n : \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} |B_i| \leqslant 1\}.$$

2. Montrer que l'on définit ainsi des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $||AB||_\infty \leqslant n||A||_\infty \, ||B||_\infty$ et $|||AB|||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \, |||B|||_\infty$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel, et soit $p : E \to [0, \infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \iff x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouver que p est une norme sur E ssi l'ensemble $C = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in]0, 1[, x, y \in C \Rightarrow tx + (1 - t)y \in C.$$

Exercice 4 Soit Λ une forme linéaire réelle (pas forcément continue) non nulle sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé E. Prouver que $\Lambda(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ quand V est un ouvert dans E.

Exercice 5 Soit E un e.v.n., et soit L un sous-espace de E de dimension finie. Montrer que L est fermé.

Exercice 6 Transformée de Fourier Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, Leb)$ une fonction intégrable. On note $\langle \xi, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ le produit scalaire usuel.

1. Montrer que la fonction suivante est bien définie

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx.$$

2. Montrer que $\hat{f}$ et continue sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini : $\lim_{||x||\to\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Exercice 7 On fixe $1 \leqslant p < q < \infty$ et Leb la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

On rappelle et on pourra utiliser sans démonstration l'inégalité pour $a > 0, b > 0, \alpha \in [0, 1]$:

$$(a + b)^\alpha \leqslant a^\alpha + b^\alpha.$$

1. Soit $x \in L^q(]0,1[, Leb)$. Montrer que $x \in L^p(]0,1[, Leb)$ et que $\lim_{p\to q, p\leqslant q} ||x||_p = ||x||_q$.
2. On suppose maintenant $y \in L^\infty(]0,1[, Leb)$. Donner une inégalité entre $||y||_p$ et $||y||_q$
   En déduire que la limite suivante existe : $\lim_{p\to\infty} ||y||_p < \infty$.
3. On suppose toujours $y \in L^\infty(]0,1[, Leb)$. Montrer que $\lim_{p\to\infty} ||y||_p = ||y||_\infty$.
4. On suppose que $f \in L^q(]0,1[, Leb)$ pour tout $1 < q < \infty$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $||f||_q \leqslant C$ pour tout $1 < q < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty(]0,1[, Leb)$.
5. Trouver une fonction dans $L^q(]0,1[, Leb)$ pour tout $1 < q < \infty$ mais pas dans $L^\infty(]0,1[, Leb)$.

Exercice 8 Young-Hölder-Minkowski Montrer l'inégalité de Young : soit $1 < p, q < +\infty$ des réels conjugués ce qui veut dire $p^{-1} + q^{-1} = 1$, alors pour $(a,b) \in \mathbb{R}^+$ on a

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En déduire l'inégalité de Hölder en dimension finie, pour (x,y) dans $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

Dans la suite $(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ désigne un espace mesuré σ-fini. En déduire l'inégalité de Hölder généralisée, si $f, g \in L^p(\Omega, \mu, \mathcal{T}) \times L^q(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ où p, q conjugués alors

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Montrer l'inégalité de Minkowski en utilisant celle de Hölder, à savoir, si $f, g \in L^p(\Omega, \mu, \mathcal{T})$, $1 < p < \infty$ alors $||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$.

Exercice 9 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$, et que l'injection est continue.

Exercice 10 Soit $1 \leqslant p < +\infty, 1 \leqslant q \leqslant +\infty$.

1. Soit $\alpha > 0$, $f(x) = (1 + ||x||_2)^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}^d$. Pour quel p a-t-on $f \in L^p(\mathbb{R}^d, Leb)$?
2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $L^1(\Omega, Leb) \cap L^\infty(\Omega, Leb)$ est dense dans $L^p(\Omega, Leb)$.
3. Montrer que $\{f \in L^p(\Omega, Leb) : ||f||_q \leqslant 1\}$ est fermé dans $L^p(\Omega, Leb)$.

Exercice 11 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

1. Montrer que $L^q([0,1], Leb)$ est un sous-espace strict de $L^p([0,1], Leb)$.
2. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R}, Leb)$ et $L^p(\mathbb{R}, Leb)$ (justifier) ?
3. Construire un sous-espace de $L^p([0,1], Leb)$ isométrique à $\ell^p(\mathbb{N})$.

Exercice 12 Banach, Mazurkiewicz On note $C^0([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ munie de la norme sup. On pose l'ensemble

$$A_k = \{u \in C^0([0,1]); \exists \xi \in [0, 1-k^{-1}], \forall h \in (0, k^{-1}), |u(\xi+h) - u(\xi)| \leqslant kh\}.$$

En étudiant les propriétés des ensembles A_k, montrer que l'ensemble Z des fonctions de $C^0([0,1])$ dérivables nulle part dans $(0,1)$ est partout dense dans $C^0([0,1])$.

Exercice 13 Nombres de Liouville

Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit de Liouville si quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, p \in \mathbb{Z}$ t.q. $|x - \frac{p}{q}| < q^{-n}$. Montrer que les nombres de Liouville dans l'intervalle $[0,1]$ forment une intersection dénombrable d'ouverts denses.