
Feuille de TD 2

Espaces de fonctions continues.

Exercice 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C_b^k(U)$ l'ensemble des fonctions C^k sur U dont les k-premières dérivées sont bornées. On note pour $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$,$\partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n} u$. On pose

$$||u||_{C_b^k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Montrer que c'est une norme rendant $C_b^k(U)$ un espace de Banach. De plus, montrer que c'est une algèbre de Banach : $\forall f, g \in C_b^k(U), ||fg||_{C_b^k} \leqslant ||f||_{C_b^k} \, ||g||_{C_b^k}$.

Exercice 2 Convolution Soit $f \in L^1(\Omega, \mu, \mathcal{T}), g \in L^p(\Omega, \mu, \mathcal{T}), h \in L^q(\Omega, \mu, \mathcal{T})$ avec $1/p + 1/q = 1$,

1. Soit $\check{f}(x) = \overline{f}(-x)$. Montrer que :
$$\int \overline{(f * g)} h = \int \overline{g} (\check{f} * h).$$
2. Montrer que si $p = 1$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ (remplacer h par la bonne exponentielle).

Exercice 3 Suites régularisantes Soit ρ_n une suite régularisante et $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$:
$$\sup_{x \in K} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \to_{n \to \infty} 0$$
2. En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $||.||_\infty$ induite par $C_b^0(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ est
$$C_0^0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b^0(\mathbb{R}^n) : \lim_{||x|| \to \infty} |f(x)| = 0\}.$$

Exercice 4 Inégalité d'Young Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n, Leb), g \in L^q(\mathbb{R}^n, Leb), 1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, 1 \leqslant r \leqslant \infty$ avec $1/r = 1/p + 1/q - 1 \geqslant 0$, p', q' les exposants conjugués,

1. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable (indication : en écrivant $|f(x-y)|^{p/q'}|g(y)|^{q/p'}(|f(x-y)|^{1-p/q'}|g(y)|^{1-q/p'})$).
2. On pose $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy f(x-y)g(y)$, montrer que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n, Leb)$ et $||f * g||_r \leqslant ||f||_p ||g||_q$.
3. Montrer que si $r = \infty$ alors $f * g \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ et si $1 < p < \infty$, $(f * g)(x) \to_{|x| \to \infty} 0$.

Exercice 5 Extension des fonctions $C^{0,\alpha}$

Soit $S \subset X$ un espace métrique. Soit $f : S \to \mathbb{R}$, α-Höldérienne de constante $M > 0$ avec $\alpha \in]0, 1]$.

Soit
$$g(x) = \sup_{s \in S} f(s) - Md(x, s)^\alpha$$

1. Montrer que $g(s) = f(s)$ pour tout $s \in S$
2. Si $s \in S$ et $x \in X$, montrer que g est finie sur X en montrant que

$$|g(x) - f(s)| \leqslant Md(x,s)^\alpha.$$

3. Montrer que g est α-Höldérienne de constante $M > 0$ sur X.

Exercice 6 Méthode de Schauder pour résoudre une équation différentielle dans $C^{2,\alpha}(]0,1[)$. Soit $\alpha \in]0,1]$, $q, f \in C^{0,\alpha}(]0,1[), q \geqslant 0$.

On cherche à trouver $u \in C^{2,\alpha}(]0,1[)$ avec $u(0) = u(1) = 0$ et

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[.$$

1. En considérant deux solutions u_1, u_2, déduire l'unicité des solutions en montrant :

$$\int_{[0,1]} (u_1' - u_2')^2 + \int_{[0,1]} q(u_1 - u_2)^2 = 0.$$

2. Montrer que

$$0 \in A := \{t \in [0,1] : \exists! u \in C^{2,\alpha}(]0,1[), -u'' + tqu = f, u(0) = u(1) = 0\}.$$

3. Soient $E = \{u \in C^{2,\alpha}(]0,1[), u(0) = u(1) = 0\}$, $F = C^{0,\alpha}(]0,1[)$ et $P_t = -d^2/dx^2 + tq : E \to F$. Montrer que $A = \{t \in [0,1] : P_t \text{ bijectif }\}$ est un ouvert.
4. Soit $t_n \in A$, $t_n \to t$, montrer qu'une suite de solution u_n de $P_{t_n} u_n = f$ est bornée dans $C^{2,\alpha}(]0,1[)$.
5. Extraire une sous-suite et montrer que la limite u est solution et conclure que A fermé.
6. Conclure que $1 \in A$.

Exercice 7 Extension de Tietze-Urysohn

Soit F un fermé de X espace métrique. Soit $E = C_b^0(X, \mathbb{R})$ et $p : E \to C_b^0(F, \mathbb{R})$ l'application de restriction. On va montrer que p est surjective (et un peu mieux).

1. Soit $g \in C_b^0(F, \mathbb{R})$ avec $||g||_\infty \leqslant 1$. Soient $K_1 := g^{-1}([1/3, 1])$ et $K_2 := g^{-1}([-1, -1/3])$. Soit :

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{d(x,K_2) - d(x,K_1)}{d(x,K_2) + d(x,K_1)}, \quad d(x,K_i) := \inf\{d(x,y), y \in K_i\}.$$

   (On comprend la valeur comme 0 si K_1 et K_2 vides et sinon, $-1/3$ si K_1 vide, $1/3$ si K_2 vide). Vérifier que $f \in E, ||f||_\infty \leqslant 1/3$ et $||p(f) - g||_\infty \leqslant \alpha = 2/3$. (on dit que p est presque surjective)
2. En déduire, qu'il existe $F \in E, ||F||_\infty \leqslant 1$ telle que $p(F) = g$. (Indication : construire une suite f_n par récurrence à partir du résultat précédent)
3. Montrer que p induit une isométrie $E/Ker(p) \simeq C_b^0(F, \mathbb{R})$ (on dit que p est une surjection métrique).