Feuille de TD 2

Autour des théorèmes de Hahn-Banach. Ensembles convexes.

Exercice 1

Soit $E = \{u \in C^0([0,1],\mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ avec la norme $||.||_\infty$

1. Montrer que $E = ev_0^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par l'application linéaire continue $ev_0(u) = u(0)$, inclus dans l'espace de Banach $C^0([0,1],\mathbb{R})$ donc c'est un espace de Banach.
2. Montrons que $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$ définit $f \in E'$. f est linéaire par linéarité de l'intégrale et $|f(u)| \leqslant \int_0^1 |u(t)|dt \leqslant \int_0^1 ||u||_\infty dt = ||u||_\infty$ donc f est continue et $||f||_{E'} \leqslant 1$.
3. Montrons que $||f||_{E'} = 1$. Il suffit de noter que $u_n = x^{1/n}$ vérifie $||u_n||_E \leqslant 1$ et $f(u_n) = \frac{n}{n+1} \to 1$.
4. Montrons qu'il n'existe pas $u \in E$ avec $f(u) = 1$ et $||u||_\infty \leqslant 1$. En effet, comme u est continue en 0 il existe n tel que pour $|x| \leqslant 1/n$, $|u(x)| = |u(0) - u(x)| \leqslant 1/2$ donc
$$|f(u)| \leqslant \int_0^{1/n} |u(t)|dt + \int_{1/n}^1 ||u||_\infty dt \leqslant \frac{1}{2n} + (1 - \frac{1}{n}) < 1$$
donc $f(u) \neq 1$.
5. Comme en cours il existe $u \in E''$ tel que $u(f) = ||f||_{E'} = 1$ et $||u||_{E''} = 1$. Il suffit de prolonger $u(\lambda f) = \lambda$ de $G = \mathbb{R}f \subset E'$ qui vérifie $|u(\lambda f) = |\lambda| \leqslant ||\lambda f||_{E'}$ à E' par Hahn-Banach. Comme la forme sur G est de norme 1, on peut trouver $||u||_{E''} = 1$.
6. MOntrons par l'absurde que $J(E) \neq E''$ (E n'est pas réflexif). En effet, si on avait $J(E) = E''$ le u de la question précédente serait un $u = J(v)$
Or $u(f) = f(v) = 1$ et comme J est isométrique $||v||_E = ||u||_{E''} = 1$ ce qui contredit le point 4.
7. COmme indiqué en TD on considère
$$T : C = (C^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty) \to \mathbb{R} \oplus^\infty E$$
Par définition, de la somme directe $||T(u)|| = \max(|u(0)|, ||u - u(0)||_\infty) \leqslant ||u||_\infty + |u(0)| \leqslant 2||u||_\infty$.
De plus il est facile de voir que $T^{-1}(\lambda, v) = \lambda + v$ (noter que comme $v \in E$, $T^{-1}(\lambda, v)(0) = \lambda + v(0) = \lambda$) Or on a
$$||T^{-1}(\lambda, v)||_\infty \leqslant |\lambda| + ||v||_\infty \leqslant 2\max(|\lambda|, ||v||_\infty)$$
DOnc finalement pour tout $u \in C$:
$$\frac{1}{2}||u||_\infty = \frac{1}{2}||T^{-1}(T(u))||_\infty \leqslant ||T(u)|| \leqslant 2||u||_\infty.$$
8. Montrons que
$$I(\lambda, u)(\mu, f) = \lambda\mu + u(f)$$
définit (formellement par la même formule) des isométries $I : \mathbb{R} \oplus^1 E' \to (\mathbb{R} \oplus^\infty E)'$ et $I : \mathbb{R} \oplus^\infty E'' \to (\mathbb{R} \oplus^1 E')'$

D'abord dans le premier cas :

$$|I(\lambda,u)(\mu,f)| \leqslant \max(|\mu|,||f||_E)(|\lambda|+||u||_{E'})_{\mathbb{R}\oplus^1 E'} = ||(\lambda,u)||_{\mathbb{R}\oplus^1 E'}||(\mu,f)||_{\mathbb{R}\oplus^\infty E}$$

et dans le second cas

$$|I(\lambda,u)(\mu,f)| \leqslant (|\mu|+||f||_{E'})\max(|\lambda|,||u||_{E''}) = ||(\lambda,u)||_{\mathbb{R}\oplus^\infty E''}||(\mu,f)||_{\mathbb{R}\oplus^1 E'}$$

d'où I bien défini et dans chaque cas $|||I||| \leqslant 1$
Réciproquement, si $(\lambda,u) \in \mathbb{R}\oplus^1 E'$, on pose $\mu = |\lambda|/\lambda 1_{\lambda\neq 0}$ et on fixe $\epsilon > 0$ et on prend f avec $||f||_E \leqslant 1$ tel que $u(f) = |u(f)| \geqslant ||u||_{E'} - \epsilon$
Donc

$$|I(\lambda,u)(\mu,f)| = |\lambda| + |u(f)| \geqslant ||(\lambda,u)||_{\mathbb{R}\oplus^1 E'} - \epsilon$$

et comme $||(\mu,f)||_{\mathbb{R}\oplus^\infty E} \leqslant 1$, on trouve :

$$||I(\lambda,u)||_{(\mathbb{R}\oplus^\infty E)'} \geqslant ||(\lambda,u)||_{\mathbb{R}\oplus^1 E'} - \epsilon \to_{\epsilon\to 0} ||(\lambda,u)||_{\mathbb{R}\oplus^1 E'}.$$

La deuxième propriété d'isométrie est similaire. Si $(\lambda,u) \in \mathbb{R}\oplus^\infty E''$ avec le même μ, avec on a $||(\mu,0)|| \leqslant 1$ et

$$|I(\lambda,u)(\mu,0)| = |\lambda|$$

et on peut prendre $f \in E'$ avec $||f||_{E'} = 1$ et $u(f) = ||u||_{E''}$(cf cours et question 5).

$$|I(\lambda,u)(0,f)| = |u(f)| = ||u||_E$$

donc

$$||I(\lambda,u)||_{(\mathbb{R}\oplus^1 E')'} \geqslant \max(|\lambda|,||u||_E) = ||(\lambda,u)||_{(\mathbb{R}\oplus^\infty E'')}.$$

POur la surjectivité, on a la formule explicite disons pour $F \in (\mathbb{R}\oplus^\infty E)'$

$$I^{-1}(F) = (F(1,0),F(0,.)) \in \mathbb{R}\oplus^1 E'.$$

Remarquons que comme $T : C \to \mathbb{R}\oplus^\infty E$ est un isomorphisme (c'est à dire T et T^{-1} sont des applications linéaires continues, pas forcément isométriques. Alors T^t est aussi un isomorphisme (car $(T\circ S)^t = S^t\circ T^t$ et $Id^t = Id$ donc $(T^{-1})^t$ est l'inverse de T^t) et donc T^{tt} est aussi un isomorphisme.
Vérifions enfin que si $T : C \to D$ est un isomorphisme : C est réflexif si et seulement si D est réflexif (on reverra cela en cours au chapitre 5). En effet, soit $J_C : C \to C''$, $J_D : D \to D''$ les applications canoniques.
pour $f \in D', u \in C$

$$(J_D\circ T)(u)(f) = f(T(u)) = [T^t(f)](u) = [J_C(u)][T^t(f)] = T^{tt}[J_C(u)](f)$$

donc $(J_D\circ T) = T^{tt}\circ J_C$donc si C réflexif $J_C(C) = C''$

$$D'' = T^{tt}[C''] = T^{tt}[J_C(C)] = J_D(T(C)) = J_D(D)$$

donc D réflexif et réciproquement par symétrie (on a utilisé la surjectivité de T^{tt}).
On déduit donc dans notre cas que si C était réflexif, alors $D = \mathbb{R}\oplus^\infty E$ serait réflexif, mais un calcul utilisant seulement la définition et le calcul des duaux donne$J_D(\lambda,u) = (\lambda, J_E(u))$ d'où si D était réflexif $\mathbb{R}\oplus^\infty J_E(E) = \mathbb{R}\oplus^\infty E''$ impliquant $J_E(E) = E''$, en contradiction avec la question (6).

Exercice 2 (cf TD)

Exercice 3 (cf TD)

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f_0, f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur E. Utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach pour montrer l'equivalence des trois assertions suivantes :

1. $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ tel que $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$;
2. $\exists M \in [0, \infty[$ tel que
$$\forall x \in E, |f_0(x)| \leqslant M \max_{i=1}^n |f_i(x)|,$$
3. $\cap_{i=1}^n Ker(f_i) \subset Ker(f_0)$

On ne détaille que (3) implique (1).

$Im(f_0, ..., f_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est un s.e.v. de dimension fini donc complet donc fermé et $(1, 0, ..., 0)$ est un convexe compact. Ils sont disjoints si on suppose (3) car si $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$, (3) force $f_0(x) = 0 \neq 1$.

On peut donc appliquer la deuxième forme géométrique de Hahn-Banach pour obtenir $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{n+1})'$ et $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) < c < \lambda_0$$

En prenant $x = 0$ on obtient $\lambda_0 > 0$ en remplaçant x, par x$/\epsilon \in E$ on obtient $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) < c\epsilon \rightarrow_{\epsilon \to 0} 0$

donc

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) \leqslant 0$$

.

et en remplaçant x, par $-x$ on obtient

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) = 0 < \lambda_0$$

En divisant par λ_0 on obtient la condition de dépendance linéaire du (1).

Exercice 5

On prend $E = \ell^2(\mathbb{N})$, et

$$K_1 = \{x = (x_0, x_1, ...) \in E : \forall i, x_i > 0\}, \quad K_2 = Vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$$

On a vu en TD que ces deux parties dans E sont convexes et disjointes (car tout $x \in K_2$ vérifie $x_n = 0$ pour n grand et ne peut donc avoir $x_i > 0$). Montrons qu'il n'existe aucun $f \in E'$ qui satisfait

$$\forall x \in K_1, y \in K_2 \quad f(x) < f(y).$$

En effet un tel f vérifie pour $\epsilon > 0$ vu que $x\epsilon \in K_1$

$$f(x)\epsilon < f(y).$$

soit avec $\epsilon \to 0$

$$\forall y \in K_2 \quad 0 \leqslant f(y).$$

Mais comme $-y \in K_2$, $f(-y) \geqslant 0$ donc $K_2 \subset Ker(f)$. Or K_2 est dense dans E donc $f = 0$ ce qui contredit l'inégalité stricte.

Exercice 6 Montrer que $\overline{Conv(A)}$ est le plus petit convexe fermé contenant A. (cf TD)

Exercice 7 Soient E un e.v.n. et $C \subset E$ une partie.

1. Montrons en utilisant le théorème de séparation de Hahn-Banach que $x \in \overline{Conv(C)}$ si et seulement si pour tout $f \in E'$:

$$f(x) \leqslant \sup_{y \in C} f(y).$$

Pour l'implication directe $\Rightarrow$ Si on suppose $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \in COnv(C)$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0$ et $c_i \in C$
on obtient en utilisant la linéarité et la positivité des λ_i

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(c_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i \sup_{y \in C} f(y) = \sup_{y \in C} f(y).$$

Si $x \in \overline{Conv(C)}$ on prend $x_n \to x$ $x_n \in Conv(C)$ et on étend la relation par continuité.
Pour la réciproque $\Leftarrow$, on raisonne par contraposé et on suppose $x \notin \overline{Conv(C)}$. On applique Hahn Banach au compact convexe non vide $A = \{x\}$, disjoint du convexe fermé non vide $\overline{Conv(C)}$. On obtient donc $f \in E'$ avec la séparation stricte contredisant l'autre inégalité :

$$\sup_{y \in C} f(y) < c < f(x).$$

2. On définit le polaire et le bipolaire :

$$C^o = \{f \in E' : \forall x \in C, f(x) \leqslant 1\}, \quad C^{oo} = \{x \in E : \forall x \in C^o, f(x) \leqslant 1\}.$$

Montrons que C^o est convexe car pour $\lambda \in [0,1],, f, g \in C^o$

$$\forall c \in C,\ [\lambda f + (1-\lambda) g](c) \leqslant \lambda 1 + (1-\lambda) 1 = 1 \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda) g \in C^o$$

Si $D \subset C$ alors la condition sur $f \in C^o$ s'applique au élément de $D \subset C$ donc $C^o \subset D^o$.
De plus C^{oo} est défini par des inéquation linéaire continue donc est fermé et convexe comme pour C^o (c'est l'intersection de $(C^o)^o \cap J(E)$ dans le bidual.De plus par définition $C \cup \{0\} \subset C^o$ donc le plus petit convexe fermé contenant C vérifie $\overline{Conv(C \cup \{0\})} \subset C^{oo}$.
Montrons l'égalité

$$\overline{Conv(C \cup \{0\})} = C^{oo}$$

donc l'autre inclusion (on a vu le cas $0 \in C$ en TD), on prend donc $x \in C^{oo}$, on pose $D = C \cup \{0\}$ et on montre l'inégalité du 1. On note que $\sup_{y \in D} f(y) \geqslant f(0) - 0$.
Il y a deux cas, si $\lambda := \sup_{y \in D} f(y) > 0$ par définition pour $y \in D$:

$$\frac{f(y)}{\sup_{y \in D} f(y)} \leqslant 1$$

donc $f/\lambda \in D^o = C^o$. Donc comme on suppose $x \in C^{oo}$ on obtient

$$\frac{f(x)}{\sup_{y \in D} f(y)} \leqslant 1$$

soit l'inégalité voulu par positivité du dénominateur :

$$f(x) \leqslant \sup_{y \in D} f(y).$$

Si $\sup_{y\in D} f(y) = 0$, alors $tf(d) \leqslant 0 \leqslant 1$ pour $t > 0, d \in D$ donc $tf \in C^o$ donc comme $x \in C^{oo}$:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{t} \to_{t\to\infty} 0$$

et donc

$$f(x) \leqslant 0 = \sup_{y\in D} f(y).$$

Par le 1. on déduit donc que $x \in \overline{Conv(C \cup \{0\})}$.