Feuille de TD 2 : Correction partielle

Espaces de fonctions continues.

Exercice 1 Extension des fonctions $C^{0,\alpha}$
(cf. TD)

Exercice 2 Une topologie non normable (cf TD)

Exercice 3 Prolongement des fonctions de $W^{1,p}(I)$

Soit I un intervalle. On cherche à obtenir une application linéaire continue $P_I : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ tel que la restriction de $P_I(u)$ à I soit u.

1. Si $I =]0, \infty[$, montrer que $P_I(u) = u^*$ définit par $u^*(x) = u(x)1_{\mathbb{R}_+}(x) + u(-x)1_{\mathbb{R}_-^*}(x)$ convient. Soit $g(x) = u(x)1_{\mathbb{R}_+}(x) - u'(-x)1_{\mathbb{R}_{-^*}}(x)$. Clairement $g \in L^p(\mathbb{R})$ et montrons que $(u^*)' = g$ Soit donc $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^*)$ on doit calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} dx u^*(x)\phi'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} dx u(x)\phi'(x) + \int_{\mathbb{R}_-^*} dx u(-x)\phi'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} dx u(x)(\phi'(x) + \phi'(-x))$$
$$= -\int_{\mathbb{R}_+} dx u'(x)(\phi(x) - \phi(-x)) = -\int_{\mathbb{R}} dx g(x)\phi(x)$$

Si on avait ce résultat pour $u^* \in C_c^1(\mathbb{R}^*)$ on concluerait $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $||u^*||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = 2||u||^p_{W^{1,p}(I)}$. Comme $u \mapsto u^*$ est clairement linéaire la borne $\leqslant$ de l'égalité ci dessus donne P continue.
IL reste à voir que le raisonnement s'applique pour $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$.
SOit $\theta_n(x) = 0$ si $x \leqslant 1/2n$, et 1 si $x \geqslant 1/n$ et $\theta_n(x) = \theta_1(nx)$, $\theta_n \in C^0(\mathbb{R}, [0,1])$. Soit η comme au 3 $\eta_n(x) = \eta(x/n)$. Soit $\zeta(x) = (\phi(x) - \phi(-x)) = \int_0^x (\phi'(t) + \phi'(-t))dt$.
On pose $\psi_n(x) = \int_0^x \theta_n(t)(\phi'(t) + \phi'(-t))dt$ et $\zeta_n(x) = \psi_n(x)\eta_n(x)$.

   (i) Montrons $||\zeta_n - \zeta||_\infty \to 0$.
   En effet, on a $\zeta_n - \zeta = \zeta_n - \zeta\eta_n + (\eta_n - 1)\zeta$
   Or $(\zeta_n - \zeta\eta_n)(x) = (\psi_n - \zeta)(x)\eta_n(x)$ et

$$(\psi_n - \zeta)(x) = \int_0^x (\theta_n(t) - 1)(\phi'(t) + \phi'(-t))dt = \int_0^{x\ 1/n} (\theta_n(t) - 1)(\phi'(t) + \phi'(-t))dt$$

   car $\theta_n(t) = 1 sit \geqslant 1/n$
   donc $||\psi_n - \zeta||_\infty \leqslant \int_0^{1/n} |\phi'(t) + \phi'(-t)|dt \leqslant 2||\phi'||_\infty/n$ et si $\mathrm{supp}(\phi) \subset [-a, a]$ $||(\eta_n - 1)\zeta||_\infty \leqslant ||\zeta||_\infty \sup_{x \leqslant a} |(\eta_n - 1)(x)|$ qui est 0 pour $n/4 \geqslant a$ donc pour un tel n :

$$||\zeta_n - \zeta||_\infty \leqslant 2||\phi'||_\infty/n \to_{n\to\infty} 0$$

   ce qui conclut.

   (ii) Montrons $||\zeta_n - \zeta||_1$ borné. Par inégalité triangulaire et $||\eta_n||_1 \leqslant 1$
   $||\zeta_n - \zeta||_1 \leqslant ||\psi_n - \zeta||_\infty ||\eta_n||_1 + ||(\eta_n - 1)\zeta||_1 \leqslant 2||\phi'||_\infty ||\eta||_1 + ||\zeta||_1 < \infty$
   car $||\eta_n||_1 = n||\eta||_1$ par changement de variable et le premier cas donne $||\psi_n - \zeta||_\infty \leqslant 2||\phi'||_\infty/n$.

(iii) En conséquence si $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$, on a

$$||\zeta_n - \zeta||_q^q \leqslant ||\zeta_n - \zeta||_\infty^{q-1} ||\zeta_n - \zeta||_1 \to 0$$

donc par Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}_+} dxu'(x)\zeta_n(x) \to \int_{\mathbb{R}_+} dxu'(x)(\phi(x) - \phi(-x)).$$

(iv) De plus, on veut obtenir une limite nulle après multiplication par u' et intégration de

$$\zeta_n' - \zeta' = \psi_n \eta_n' + (\psi_n' - \zeta')\eta_n + \zeta'(\eta_n - 1)$$

Or $\eta_n'(x) = 1/n\eta'(x/n)$ donc par inégalité triangulaire et Hölder :

$$||\psi_n\eta_n'||_q \leqslant ||(\psi_n - \zeta)\eta_n'||_q + ||\zeta\eta_n'||_q \leqslant ||\zeta||_q ||\eta'||_\infty / n + ||(\psi_n - \zeta)||_\infty^{(q-1)/q} ||\eta_n'||_1^{1/q} \to 0$$

car $||\eta_n'||_1 = ||\eta'||_1$ par changement de variable et donc $||\psi_n\eta_n'||_q \to 0$ avec la borne du (i) sur la norme infinie et donc par Hölder $\int u^* \psi_n \eta_n' \to 0$.
De plus, $(\psi_n' - \zeta') = (\theta_n - 1)\zeta'(x) \to_{n\to\infty} 0.p.p.$ sur $]0, \infty[$ par choix de θ_n. De mˆême $\zeta'(\eta_n - 1) \to 0$ p ;p. il manque juste une domination :

$$|(\psi_n' - \zeta')\eta_n + \zeta'(\eta_n - 1)| \leqslant 2|\zeta'|$$

Or $\zeta' \in C_c^0(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ donc

$$|(\psi_n' - \zeta')\eta_n + \zeta'(\eta_n - 1)||u^*| \leqslant 2|\zeta'||u^*|$$

est une domination par une fonction intégrable donc par convergence dominée :

$$\int (\psi_n' - \zeta')\eta_n u^* + \zeta'(\eta_n - 1)u^* \to 0$$

En combinant avec le résultat précédent, on obtient : $\int \zeta_n' u^* \to \int \zeta' u^*$.

(v) Il reste à combiner les calculs :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dxu^*(x)\phi'(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} dxu(x)(\phi'(x) + \phi'(-x)) =^{(iv)} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} dxu(x)(\zeta_n'(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} - \int_{\mathbb{R}_+} dxu'(x)(\zeta_n(x)) =^{(iii)} - \int_{\mathbb{R}_+} dxu'(x)(\phi(x) - \phi(-x)) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} dxg(x)\phi(x).\end{aligned}$$

Au sens du chapitre 5, on a vu $\zeta_n \to \zeta$ dans L^qet $\zeta_n' \to \zeta'$ préfaiblement dans L^q.

2. Conclusion dans le cas I non-borné se fait par translation.
3. Soit $\eta \in C_b^1(\mathbb{R})$, nulle pour $x > 3/4$ et 1 pour $x < 1/4$. Soit $I =]0, 1[$, $u \in W^{1,p}(I)$, montrons que $\eta u \in W^{1,p}([0, \infty[)$.
SOit $g = \eta u' + \eta' u \in L^p(I)$ par Hölder car $\eta, \eta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et pour $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^*)$ on a en utilisant $\eta\phi' = [(\eta\phi)' - \eta'\phi]$ et $(\eta\phi) \in C_c^1(]0, 1[)$:

$$\int \eta u \phi' = \int u[(\eta\phi)' - \eta'\phi] = - \int u'(\eta\phi) + \eta' u \phi = - \int g\phi)$$

De plus $||\eta u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^*)}^p \leqslant \max(||\eta||_\infty^p, ||\eta'||_\infty^p) C ||u||_{W^{1,p}(]0,1[)}^p$.

4. Montrons que $P_{]0,1[}(u) = P_{]0,\infty[}(\eta u)+P_{]-\infty,1[}((1-\eta)u)$ convient. D'abord la linéarité est évidente, ainsi que l'espace d'arrivée et la continuité en combinant les bornes de 1 et 2. Mais par restriction du membre de droite à]0,1[on obtient $\eta u+(1-\eta)u) = u$ ce qu'on voulait.
5. La conclusion dans le cas I borné se fait par translation et dilatation.

Exercice 4 Convolution avec $W^{1,p}(I)$

1. Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}), u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$, montrons que la convolution $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ et que $(\rho * u)' = \rho * u'$.

   Par le cours on sait déjà que $\rho * u \in L^p(\mathbb{R}), \rho * (u') \in L^p(\mathbb{R})$. On utilise le TD 1 ex 12 pour calculer pour $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}), \rho \in C^0_c(\mathbb{R})$ et le calcul de la dérivée de la convolution du cours donnant $\vee\rho * (\varphi') = (\vee\rho * \varphi)' \in C^0_c(\mathbb{R})$ par le calcul du support de la convolée vu en cours

$$\int \overline{\varphi'}(\rho * u) = \int \overline{\check{\rho} * \varphi'} u = \int (\overline{\check{\rho} * \varphi})' u = -\int (\overline{\check{\rho} * \varphi}) u' = -\int \overline{\varphi}(\rho * (u')).$$

   comme $||\rho * u||_p \leqslant ||\rho||_1 ||u||_p$ si on prend par densité, $\rho_n \in C^0_c(\mathbb{R})$ avec $\rho_n \to \rho \in L^1$. On déduit $||\rho_n * u - \rho * u||_p \leqslant ||\rho_n - \rho||_1 ||u||_p \to 0$ Donc en passant à la limite dans l'identité ci-dessus, on obtient pour $\rho \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int \overline{\varphi'}(\rho * u) = -\int \overline{\varphi}(\rho * (u')).$$

   Comme $\rho * (u') \in L^p(\mathbb{R})$ comme déjà remarqué, cela implique $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ et par définition de la dérivée (faible) et son unicité $(\rho * u)' = \rho * u'$.
2. Soit ξ une fonction lisse à support dans $[-2, 2]$ égale à 1 sur $[-1, 1]$ et $\xi_n(x) = \xi(x/n)$. Montrons que $\xi_n u \to u$ dans L^p.

   IL suffit de remarquer que $\xi_n \to 1$ p.p. et $||\xi_n||_\infty \leqslant 1$ donc $\xi_n u \to u$ p.p. et $|\xi_n u| \leqslant |u|$ est une domination par une fonction dans L^p donc par TCD version L^p on déduit que $||\xi_n u - u||_p \to 0$.
3. Soit ρ_n une suite régularisante. Déduisons que $u_n = \xi_n(\rho_n * P_I(u))$ converge vers $u \in W^{1,p}(I)$ dans $W^{1,p}(I)$.

   D'abord, Il est facile de voir comme à l'exercice précédent que $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et

$$u_n' = \xi_n(\rho_n * P_I(u))' + \xi_n'(\rho_n * P_I(u)) = \xi_n(\rho_n * (P_I(u))') + \xi_n'(\rho_n * P_I(u))$$

   Il suffit de voir $||u_n - P_I(u)||_p \to 0$ et $||u_n' - u'||_p \to 0$
   Or en utilisant l'inégalité triqngulaire et Holder (vu $||xi_n||_\infty \leqslant 1$) on a :

$$\begin{aligned} ||u_n - u||_p &\leqslant ||\xi_n(\rho_n * P_I(u) - P_I(u))||_p + ||\xi_n P_I(u) - P_I(u)||_p \\ &\leqslant ||(\rho_n * P_I(u) - P_I(u))||_p + ||\xi_n P_I(u) - P_I(u)||_p \end{aligned}$$

   Or le deuxième terme tend vers 0 par la question précédente et le premier par le cours (propriété des suites régularisantes).
   De plus, $\xi_n'(x) = \xi'(x/n)/n$ d'où $||\xi_n'||_\infty \leqslant ||\xi'||_\infty/n$ donc de même :

$$\begin{aligned} ||u_n' - P_I(u)'||_p &\leqslant ||\xi_n(\rho_n * P_I(u)' - P_I(u)')||_p + ||\xi_n P_I(u)' - P_I(u)'||_p + ||\xi_n'||_\infty ||\rho_n * P_I(u)||_p \\ &\leqslant ||(\rho_n * P_I(u)' - P_I(u)')||_p + ||\xi_n P_I(u)' - P_I(u)'||_p + ||\xi_n'||_\infty ||P_I(u)||_p \to 0 \end{aligned}$$

   comme précédemment.

4. On conclut que la restriction à I de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(I)$ car $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ par le cours vu ξ_n à support compact et $\rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus la norme de la restriction est plus petite que la norme totale (avec la même dérivée) : donc $||(u_n)|_I - u||_{W^{1,p}(I)} \leqslant ||u_n - P_I(u)||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to 0$.
5. Montrons $W^{1,p}(I)$ est une algèbre (en utiliser l'inclusion continue vue en cours dans $C_b^0(I)$)
   Soit $u, v \in W^{1,p}(I)$ et $u_n \to u, v_n \to v$ des suites dans $C_c^\infty(\mathbb{R})|_I$ convergeant dans $W^{1,p}(I)$. En particulier par l'injection continue $||u_n - u||_\infty \to 0, ||v_n - v||_\infty \to 0$
   Or $u_n v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})|_I \subset W^{1,p}(I)$ Il suffit donc de voir que $||u_n v_n - uv||_p \to 0 ||(u_n v_n)' - (u'v + uv')||_p \to 0$ pour montrer que $uv \in W^{1,p}(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$. (cf lemme du cours montrant que la convergeance L^p d'une suite et sa dérivée implique la limite est dnas $W^{1,p}$ avec dérivée la limite des dérivées).
   Or vu les limites en norme infini (qui ne serve ici que pour la bornitude en norme infini) : $||u_n v_n - uv||_p \leqslant ||u_n||_\infty ||v_n - v||_p + ||u_n - u||_p ||v||_\infty \to 0$
   Et de plus de même par inégalité triangulaire et Holder :
   $$||u_n' v_n - u'v||_p \leqslant ||u_n' - u||_p ||v_n||_\infty + ||u'||_p ||v_n - v||_\infty$$
   $$||u_n v_n' - uv'||_p \leqslant ||v_n' - v||_p ||u_n||_\infty + ||v'||_p ||u_n - u||_\infty.$$
   (Noter qu'ici on utilise la limite en norme infini car les dérivées sont seulement connues bornées dans L^p.)

Exercice 5 L'espace $W_0^{1,p}(I) = \overline{C_c^1(I)}^{W^{1,p}(I)}$

1. Soit $u \in W^{1,p}(I), 1 \leqslant p < \infty, G \in C^1(\mathbb{R})$ avec $G(0) = 0$.
   Montrons que $G \circ u$ et $(G' \circ u)u'$ sont dans $L^p(I)$.
   Comme par le cours on a une injection continue dans $C_b^0(\mathbb{R})$. Soit donc $K = ||u||_\infty + 1$ et comme G, G' continue sur le compact $[-K, K]$ soit , $S = \sup_{x \in [-K,K]} |G'(x)| < \infty$ Donc G est S Lipschitz et $|G(u(x))| = |G(u(x)) - G(0)| \leqslant S|u(x)|$ En particulier $||G \circ u||_p \leqslant S||u||_p$.
   De plus $||(G' \circ u)||_\infty \leqslant S$ donc par Holder $||(G' \circ u)u'||_p \leqslant ||(G' \circ u)||_\infty ||u'||_p \leqslant S||u'||_p$.
   On Conclut au résultat en raisonnant par densité.
   Par densité soit $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. Comme $G(0) = 0$, $G \circ u_n$ a un support inclus dans celui de u_n donc $G \circ u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et par composition $(G \circ u_n)' = (G' \circ u_n)u_n'$.
   Comme par le cours on a une injection continue dans $C_b^0(\mathbb{R})$ et que u_n bornée dans $W^{1,p}(I)$ c'est aussi le cas dans $C_b^0(\mathbb{R})$. On peut donc augmenter $K = \sup_n ||u_n||_\infty + 1 \geqslant ||u||_\infty + 1$ et comme G' continue sur le compact $[-K, K]$ soit $S = \sup_{x \in [-K,K]} |G'(x)| < \infty$
   $$||G \circ u_n - G \circ u||_p^p = \int |G(u_n(x)) - G(u(x))|^p \leqslant S^p ||u_n - u||_p^p \to 0$$
   et par inégalité triangulaire et Holder, on obtient :
   $$||(G \circ u_n)' - (G' \circ u)u'||_p \leqslant ||(G' \circ u_n)||_\infty ||u_n' - u'||_p + \leqslant S||u_n' - u'||_p + ||(G' \circ u_n - G' \circ u)u'||_p.$$
   Pour voir que le dernier terme tend vers 0, On raisonne par convergence dominée. $|(G' \circ u_n)u'| \leqslant S|u'| \in L^p$ est la domination et quitte à extraire, on a vu en cours qu'on peut supposer $u_n \to u$ p.p. d'où $(G' \circ u_n - G' \circ u)u' \to 0$ p.p. par continuité de G' et le TCD veersion L^p conclut à $||(G' \circ u_n - G' \circ u)u'||_p \to 0$.
   Donc $||G \circ u_n - G \circ u||_p \to 0, ||(G \circ u_n)' - (G' \circ u)u'||_p \to 0$
   on déduit donc $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ et $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.

2. Vérifions que les fonctions u dans l'adhérence de $C_c^1(I)$ vérifient $u(a) = 0$ si a fait partie du bord de I.

   On rapelle qu'on a vu que u s'étend en une fonction continue sur $\overline{I}$.

   Par exemple si $c \in I$ l'extension continue peut s'écrire $u(x) = u(c) + \int_c^x u'(t)dt$ p.p. Donc on a $u \mapsto u(a)$ linéaire par linéarité de l'intégrale et par Hölder et l'injection continue du cours

   $$|u(a)| = |u(c) + \int_c^a u'(t)dt| \leqslant ||u||_\infty + ||u'||_p |a-c|^{1/q} \leqslant (C + |a-c|^{1/q})||u||_{W^{1,p}(I)}.$$

   Donc $u \mapsto u(a)$ est linéaire continue. Et pour $u_n \in C_c^1(I)$ on a $u_n(a) = 0$ donc en passant à la limite, pour tout u dans l'adhérence on a $u(a) = 0$.

3. Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $u(a) = 0$ si a fait partie du bord de I. On cherche à montrer la réciproque de ce qui précède à savoir $u \in W_0^{1,p}(I)$.

   Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ nulle sur $[-1,1]$ et égale à $G(t) = t$ pour $|t| \geqslant 2$. Comme la question 1 s'applique on pose $u_n(x) = G(nu(x))/n$ on a $u_n \in W^{1,p}(I)$. De plus, comme u continue sur $\overline{I}$ si $x \in I$ proche de a disons $|x-a| \leqslant \epsilon$ alors $|u(x)| = |u(x) - u(a)| \leqslant 1/n$ et donc $|nu(x)| \leqslant 1$ et $u_n(x) = 0$ donc $u_n \in C_c^0(I)$. Remarquer que cela s'applique si $a = \pm\infty$ pensé comme point du bord.

   Montrons ensuite $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ c'est à dire qu'on veut approcher u_n par des fonctions dans $C_c^1(I)$. On utilise bien sûr la convolution soit ρ_m une suite régularisante. si $\mathrm{supp}(u_n) \subset [c,d] \subset]a,b[$ on prend m tel que $[c-1/m, d+1/m] \subset]a,b[$ et on étend $u_n\ env_n \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ par 0 en dehors de I et on regarde $\rho_m * v_n$ qui est dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ par l'exercice précédent. De plus le support est dans $[c-1/m, d+1/m] \subset]a,b[$ donc la restriction $(\rho_m * v_n)|_I \in W^{1,p}(I)$. Enfin par la forme du prolongement par 0 =et le cours

   $$||(\rho_m * v_n)|_I u_n||_{W^{1,p}(I)} = ||\rho_m * v_n) - v_n||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to_{m\to\infty} 0$$

   Mais $(\rho_m * v_n)|_I \in C_c^\infty(I)$ ce qui conclut à $u_n \in W_0^{1,p}(I)$.

   Montrons enfin que $||u_n - u||_{W^{1,p}(I)} \to 0$ ce qui implique $u \in W_0^{1,p}(I)$. On montre d'abord $||u_n - u||_p \to 0$ par convergence dominée. En effet Comme G' continue, si $C = \sup_{x\in[-3,3]} |G'(x)| \geqslant 1$ alors vu $|G'(x)| = 1$ en dehors de l'intervalle, $C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |G'(x)|$ et G est C-lipschitz donc $|G(x)| = |G(x) - G(0)| \leqslant C|x|$ donc $|u_n| \leqslant |u|$ est une domination dans L^p.

   De plus $G(nx)/n \to_{n\to\infty} x$ car si $x \neq 0$ pour n grand $|nx| \geqslant 2$ et $G(nx) = nx$, et si $x = 0$ $G(nx)/n = 0$.

   DOnc p.p. $u_n \to u$ et donc le TCD version L^p donne $||u_n - u||_p \to 0$.

   On Applique le même principe pour voir $||u'_n - u'||_p \to 0$ ce qui conclura. On sait du 1. que $u'_n(x) = (G'(nu(x))u'(x)$ Or $|u'_n| \leqslant C|u'|$ donne une domination dans L^p et $G'(nx) \to 1$ si $x \neq 0$ et $G'(n0) = 0$ donc $u'_n(x) \to 1_{u(x)\neq 0} u'(x)$ p.p. ; Il reste donc à voir que cela vaut $u'(x)$ p.p.

   SOit autrement dit on doit montrer que $\{x : u(x) = 0, u'(x) \neq 0\}$ a une mesure de Lebesgue nulle.

   Cela va utiliser fortement $u \in W^{1,p}$ via le théorème de différentiation de Lebesgue. D'abord sur tout $[c,d]$ p.p. on a u est l'intégrale d'une fonction intégrable u', donc d'après le théorème de différentiation de Lebesgue, u est p.p. dérivable de dérivée u'. Il suffit donc de voir

   $$A = \{x : u(x) = 0, u'(x) \neq 0, u \textit{ dérivable en } x \textit{ de dérivée } u'(x)\}$$

   a une mesure de Lebesgue nulle.

   On écrit $A = \cup_n A_n$ a une mesure de Lebesgue nulle avec $A_n = \{x : u(x) = 0, |u'(x)| \geqslant 1/n\} \cap A = B_n \cup C_n$ et $B_n = \{x : u(x) = 0, u'(x) \geqslant 1/n\} \cap A, C_n = \{x : u(x) = 0, u'(x) \leqslant -1/n\} \cap A$.

Si $x \in B_n$, $u(y) = u(x) + u'(x)(x-y) + o(x-y)$ donc il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|y-x| < \epsilon, x \neq y$ (le $o(x-y)$ est plus petit que $(x-y)/2n$ et) alors $u(y) \neq 0$ donc $y \notin A$. Le même résultat s'applique à C_n Donc A est discret pour tout $x \in A$, la distance $d(x, A-\{x\}) > 0$. C'est un fait général que forcément A est dénombrable. Remontrons le. Donc on écrit $A = \cup_n D_n$ avec $D_n = \{x \in A : d(x, A-\{x\}) \geqslant 1/n\}$. Les points de D_n sont 2 à 2 à distance au moins $1/n$ il y en a donc au plus $|c-d|/n$ dans $[c,d]$ et donc en faisant l'union sur $c,d \in \mathbb{Q}$ D_n est dénombrable et donc A dénombrable. Donc $Leb(A) = 0$ ce qui conclut.

Remarquons que la méthode suivante ne marche pas.

u est continue et donc $K = \{x : u(x) = 0\}$ est un fermé. Sur l'intérieur $Int(K)$ $u(x) = 0$ sur un ouvert donc $u'(x) = 0$ (en prenant une fonction ϕ lisse à support dans l'ouvert on a vu $\phi u \in W^{1,p}$ et $0 = (\phi u)' = \phi' u + \phi u' = \phi u'$ vaut 0 sur l'ouvert donc $u'(x) = 0$ sur si $\phi(x) \neq 0$). Donc $A \subset \partial K = K - Int(K)$ Le problème c'est qu'il y a des fermés d'intérieurs vide de mesure non-nulle donc on ne peut PAS conclure que $Leb(\partial K)$ est nulle alors qu'on a pu conclure que $Leb(A) = 0$.

Exercice 6 Méthode de Schauder pour résoudre une équation différentielle dans $C^{2,\alpha}(]0,1[)$**.** (cf TD)

Exercice 7 Extension de Tietze-Urysohn

Soit F un fermé de X espace métrique. Soit $E = C_b^0(X, \mathbb{R})$ et $p : E \to C_b^0(F, \mathbb{R})$ l'application de restriction. On va montrer que p est surjective (et un peu mieux).

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{d(x,K_2) - d(x,K_1)}{d(x,K_2) + d(x,K_1)}, \quad d(x,K_i) := \inf\{d(x,y), y \in K_i\}.$$

1. Soit $g \in C^0(K)$ avec $||g||_\infty \leqslant 1$. Soient $K_1 := g^{-1}([1/3,1])$ et $K_2 := g^{-1}([-1,-1/3])$. Soit :

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{d(x,K_2) - d(x,K_1)}{d(x,K_2) + d(x,K_1)}, \quad d(x,K_i) := \inf\{d(x,y), y \in K_i\}.$$

Vérifions que $f \in E, ||f||_\infty \leqslant 1/3$ et $||p(f) - g||_\infty \leqslant \alpha = 2/3$. (on dit que p est presque surjective)

f est continue car $d(., K_i)$ est continue et le dénominateur est non nul car $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ et $d(., K_i) > 0$ sur K_i^c.

Or

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{3}\frac{d(x,K_2) + d(x,K_1)}{d(x,K_2) + d(x,K_1)} = \frac{1}{3}$$

donc f est bornée et $|f||_\infty \leqslant 1/3$.

$$|p(f) - g| = 1_{K_1}|(\frac{1}{3} - g| + 1_{K_2}| - \frac{1}{3} - g| + (1_K - 1_{K_1} - 1_{K_2})|f - g|$$
$$\leqslant 1_{K_1}||1_{K_1}(\frac{1}{3} - g)||_\infty + 1_{K_2}||1_{K_1}(-\frac{1}{3} - g)||_\infty + (1_K - 1_{K_1} - 1_{K_2})(||f||_\infty + ||g(1_K - 1_{K_1} - 1_{K_2})||$$

et tous les termes sont inférieurs à $2/3$ par définition.

2. Déduisons qu'il existe $F \in E$, $||F||_\infty \leqslant 1$ telle que $p(F) = g$. On construit construire une suite f_n par récurrence à partir du résultat précédent telle que $f_n = F_0 + ... + F_n$

$$\sum_{k=0}^{n} ||F_k||_\infty \leqslant \frac{1}{3}(1 + ... + \frac{2^n}{3^n})$$

et

$$||p(f_n) - g||_\infty \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

On prend $f_0 = F_0 = f$ donné par 1 à partir de g. On prend $F_n/||p(f_{n-1}) - g||_\infty$ donné par 1 à partir de $-[p(f_{n-1}) - g]/||p(f_{n-1}) - g||_\infty$ (si le dénominateur est 0 on s'arrête et on prend la suite constante).

Donc on a les deux inégalités

$$||F_n||_\infty \leqslant \frac{1}{3}||p(f_{n-1}) - g||_\infty \leqslant \frac{1}{3}\frac{2^n}{3^n}$$

et

$$||p(F_n) + p(f_{n-1}) - g||_\infty \leqslant \frac{2}{3}||p(f_{n-1}) - g||_\infty \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

La deuxième inégalité donne $||p(f_n) - g||_\infty \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$. La première inégalité suit par l'hypothèse de récurrence. $\sum F_n$ est donc absolument convergente dans E par complétude, donc soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n = \lim f_n$. En passant à la limite on obtient

$$||F||_\infty \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

et $||p(F) - g||_\infty = 0$.

3. Montrons que p induit une isométrie $\overline{p} : E/Ker(p) \simeq C^0(K)$ (on dit que p est une surjection métrique). Comme p est une contraction, c'est aussi le cas de $\overline{p}$ (cf cours). De plus si $p(f) = g$ en prenant F par (2) avec $||F|| = ||g||$ et $p(F) = g = p(f)$ on a $h = F - f \in Ker(p)$ donc

$$||\dot{f}||_{E/Ker(p)} = \inf_{h \in Ker(p)} ||f + h||_\infty \leqslant ||F||_\infty = ||g|| = ||p(f)||_\infty = ||\overline{p}(\dot{f})||_\infty$$

d'où $||x|| \leqslant ||\overline{p}(x)||$ pour $x \in E/Ker(p)$.