Feuille de TD 3

Ensembles et fonctions convexes.

Exercice 1 Séparation de Hahn-Banach en dimension finie

Soit C un convexe d'un e.v.n E et soit $x \in C$. On rappelle que le cône normal à C en x (au sens de l'analyse convexe) est l'ensemble

$$N_C(x) := \{f \in E' : \forall c \in C, f(c-x) \leqslant 0\}.$$

1. Montrer que si C est un convexe d'intérieur non vide, alors $N_C(x) \neq \{0\}$ pour tout $x \in \partial C$ (la frontière de C).
2. On considère $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et $C := \{x \in E : \forall i, |x_i| \leqslant 1/i\}$. Prouver que C est un convexe fermé, que $0 \in \partial C$, mais que $N_C(0) = 0$.
3. Soit C un convexe non vide de E e.v.n. de dimension fini tel que $0 \notin C$. Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dénombrable dense dans C. Trouver $f_n \in E'$ tel que $f_n(Conv(x_1, ...x_n)) \subset [0, \infty[$. En déduire que l'on peut trouver $f \in E'$ avec $||f|| = 1$ et $f(C) \subset [0, \infty[$.
4. Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $x \in \partial C$. Montrer que $x \notin Int(\overline{C})$. En déduire qu'en dimension finie, on a toujours $Int(\overline{C}) = Int(C)$ quand C est convexe. Montrer comment l'existence d'une forme linéaire non continue fournit un contre-exemple à cette assertion en dimension infinie.
5. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial C$. Montrer que $N_C(x) \neq \{0\}$.
6. Soient C et D deux convexes non vides disjoints de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $f \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
$$\forall (x,y) \in C \times D \qquad \langle f, x \rangle \leqslant \langle f, y \rangle.$$

Exercice 2 Soient C et D des parties non vides dans E e.v.n., D étant convexe et fermé. On définit la fonction d'appui $H_C : E' \to]-\infty, +\infty]$ par

$$H_C(f) := \sup_{x \in C} f(x).$$

1. Montrer que H_C est positivement homogène et sous-additive. En déduire qu'elle est convexe.
2. Montrer que $C \subset D$ si et seulement si $H_C \leqslant H_D$. En déduire que deux parties fermées convexes coïncident ssi leurs fonctions d'appui coïncident.
3. Soit S un sous-ensemble non vide et borné de E. Prouver que $C \subset D$ si et seulement si $C + S \subset D + S$.
4. Montrer que l'équivalence est fausse en général (même en dimension 1) si S n'est pas borné, ou si D n'est pas fermé, ou si D n'est pas convexe.

Exercice 3

1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit $f : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction sci telle que
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Montrer que f est convexe.

Exercice 4 Soient D un ensemble compact convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $f : [a,b] \to D$ une fonction mesurable. Prouver que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in D.$$

Exercice 5 Prouver que la fonction $(x,y) \mapsto xy$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2+xy$ le sont.

Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).

$$exp(x+y), exp(xy), exp(x)+exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6

Soient S une partie dans E e.v.n. La fonction indicatrice I_S de S (au sens de l'analyse convexe) veut dire la fonction qui vaut 0 sur S et $+\infty$ ailleurs. Montrer que I_S est convexe ssi S est convexe et s.c.i. ssi S est fermé.

Montrer que pour S une partie fermé non-vide de E alors la fonction distance $d_S(x) := d(x,S) = \inf_{s\in S} ||x-s||$ est convexe si et seulement si S est convexe.

Exercice 7 Vérifier que si f est C^2 sur $C \subset E = \ell^2(I)$ un convexe ouvert et que pour tout $x \in C, h \in E$:

$$d^2f(x)(h,h) \geqslant \alpha||h||_2^2$$

pour $\alpha > 0$ alors f est strictement convexe.

Exercice 8 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. En déduire qu'il existe une solution unique du problème, et la trouver.

Exercice 9 Soit $g_1, ..., g_n$ des fonctions convexes C^1 définies sur $\mathbb{R}^m$ tel qu'il existe $x_0 \in A$ avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i. Soit la contrainte :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1,...,n\}, g_i(x) \leqslant 0\}.$$

1. Soit $x \in A$ avec $g_1(x) = ... = g_l(x) = 0$ (contraintes actives) et $g_{l+1}(x) < 0, ...g_n(x) < 0$. Calculer $N_A(x)$.
2. Si x minimise une fonction convexe f sur A. Montrer que x vérifie $df(x)+\sum_{i=1}^n \lambda_i dg_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geqslant 0$ (et $\lambda_i = 0$ si la i-ème contrainte n'est pas active)
3. On considère le problème de minimiser $f(x,y) := (x-3)^2 + (y-2)^2$ sous les contraintes $x^2+y^2 \leqslant 5, -x+2y \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

   Prouver qu'une solution existe qui n'est pas $(0,0)$ et en déduire que la solution satisfait $f(x,y) < 13$.

   Trouver la solution (en se guidant graphiquement et en utilisant les conditions nécéssaires).

Exercice 10 Si $f : \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ est convexe sci et si $f(u) \to_{|u|\to+\infty} +\infty$ alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$f(u) \geqslant \alpha||u|| - \beta, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$