Feuille de TD 3

Autour des théorèmes de Hahn-Banach. Ensembles convexes.

Exercice 1

Soit $E = \{u \in C^0([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ avec la norme $||.||_\infty$

1. Montrer que E est un espace de Banach.
2. Montrer que $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$ définit $f \in E'$.
3. Montrer que $||f||_{E'} = 1$.
4. Montrer qu'il n'existe pas $u \in E$ avec $f(u) = 1$ et $||u||_\infty = 1$.
5. Existe-il $u \in E''$ tel que $u(f) = 1$ et $||u||_{E''} = 1$?
6. On rappelle qu'il existe une application canonique $J : E \to E''$ tel que pour $u \in E$, $f \in E' : J(u)(f) = f(u)$. En déduire que $J(E) \neq E''$ (on dit que E n'est pas réflexif).

Exercice 2 Soit $1 \leqslant p < \infty$.

1. Déduire de l'injection continue dense $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ que l'on a l'injection continue $(\ell^p(\mathbb{N}))' \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.
2. En utilisant Hölder, vérifiez que pour q tel que $1/p + 1/q = 1$, $T : \ell^q(\mathbb{N}) \to (\ell^p(\mathbb{N}))'$ avec $T(u)(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n x_n$.
3. Montrez en utilisant la relation du cours :

$$||x||_{\ell^q(\mathbb{N})} = \sup\{\sum_{n=0}^{\infty} x_i y_i, ||y||_{\ell^p(\mathbb{N})} \leqslant 1 \, y \in \ell^1(\mathbb{N})\}$$

que tout élément de $(\ell^p(\mathbb{N}))' \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ est une suite de $\ell^q(\mathbb{N})$ et que l'on a l'isométrie $\ell^q(\mathbb{N}) \simeq (\ell^p(\mathbb{N}))'$.

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f_0, f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur E. Utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach pour montrer l'equivalence des trois assertions suivantes :

1. $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ tel que $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$;
2. $\exists M \in [0, \infty[$ tel que

$$\forall x \in E, |f_0(x)| \leqslant M \max_{i=1}^{n} |f_i(x)|,$$

3. $\cap_{i=1}^n Ker(f_i) \subset Ker(f_0)$

Indication : pour (3) implique (1) séparer $Im(f_0, ..., f_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de $(1, 0, ..., 0)$.

Exercice 4

On prend $E = \ell^2(\mathbb{N})$, et

$$K_1 = \{x = (x_0, x_1, ...) \in E : \forall i, x_i > 0\}, \quad K_2 = Vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Montrer que ces deux parties dans E sont convexes et disjointes, mais qu'il n'existe aucun $f \in E'$ qui satisfait

$$\forall x \in K_1, y \in K_2 \quad f(x) < f(y).$$

Exercice 5 Montrer que $\overline{Conv(A)}$ est le plus petit convexe fermé contenant A.

Exercice 6 Soient E un e.v.n. et $C \subset E$ une partie.

1. Montrer en utilisant le théorème de séparation de Hahn-Banach que $x \in \overline{Conv(C)}$ si et seulement si pour tout $f \in E'$:
$$f(x) \leqslant \sup_{y \in C} f(y).$$
2. On définit le polaire et le bipolaire :
$$C^o = \{f \in E' : \forall x \in C, f(x) \leqslant 1\}, \quad C^{oo} = \{x \in E : \forall f \in C^o, f(x) \leqslant 1\}.$$
Montrer que C^o est convexe et si $D \subset C$ alors $C^o \subset D^o$ et que $C^{oo} = \overline{Conv(C \cup \{0\})}$.
3. Application : Soit $O(n) \subset (M_n(\mathbb{R}), |||.|||) := L((\mathbb{R}^n, ||.||_2), (\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ l'ensemble des applications orthogonales de $\mathbb{R}^n$. En utilisant la décomposition polaire (pour $\subset$) et en identifiant $M_n(\mathbb{R}) \to (M_n(\mathbb{R}), |||.|||)'$ par $M \mapsto tr(M.)$, montrer que
$$[O(n)]^o = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : tr[\sqrt{M^tM}] \leqslant 1\} =: A.$$
(pour $\supset$ noter $A \subset B^o \subset [O(n)]^o$ qui vient du calcul $A^o = B$). En déduire que
$$B := \{M \in M_n(\mathbb{R}), |||M||| \leqslant 1\} = Conv(O(n)).$$

Exercice 7 Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| = 1\}$. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leqslant 1\} = Conv(B)$.

Exercice 8

Soit $E = C^0([0,1])$ avec la norme $||.||_\infty$. Soit
$$C = \{u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 < 1\}$$
Vérifier que C est convexe ouvert symétrique ($-C = C$) et que $0 \in C$. C est-il borné ? Montrer que la jauge p de C est une norme sur E. Est-elle équivalente à $||.||_\infty$?

Exercice 9 Soient D un ensemble compact convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $f : [a,b] \to D$ une fonction mesurable. Prouver (enutilisant l'exercice 6.1) que
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \in D.$$

Exercice 10 On veut prouver le résultat suivant : Soit $\{f_i : i = 1, 2, ..., k\}$ un ensemble fini dans E'. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il n'y a aucun $v \in E$ tel que $f_i(v) < 0$ pour tout $i \in [1, n]$;
2. L'ensemble $\{f_i : i = 1, 2, ..., k\}$ est positivement linéairement dépendant : il existe un vecteur $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq 0$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i = 0$.

Indication : Montrer premièrement que (2) $\Rightarrow$ (1). Dans l'autre sens, utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach pour
$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^k : y_i < 0, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}\}, \quad K_2 = \{(f_1(v), f_2(v), ..., f_k(v)) : v \in Z\}.$$

Exercice 11

1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit $f : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction sci telle que
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$
Montrer que f est convexe.