Correction Feuille de TD 3

Exercice 1 Séparation de Hahn-Banach en dimension finie

Soit C un convexe d'un e.v.n E et soit $x \in C$. On rappelle que le cône normal à C en x (au sens de l'analyse convexe) est l-ensemble

$$N_C(x) := \{f \in E' : \forall c \in C, f(c - x) \leqslant 0\}.$$

1. Montrons que si C est un convexe d'intérieur non vide, alors $N_C(x) \neq \{0\}$ pour tout $x \in \partial C$ (la frontière de C).

   Si $x \in \partial C$ on a $\{x\}$ et $Int(C)$ sont des convexes non-vides disjoints avec $Int(C)$ ouvert, donc par la 1ère forme géométrique de Hahn-Banach on peut les séparer, donc on a $f \in E'$ avec $f(u) < f(x)$ pour tout $u \in Int(C)$. Donc $f \neq 0$ (sinon pas d'inégalité stricte) et comme $C \subset \overline{C} = \overline{Int(C)}$ (par le corollaire du cours utilisant la jauge de C) on obtient en passant à la limite pour tout $u \in C$ (en prenant $u_n \to u$ pour $u_n \in Int(C)$), $f(u) \leqslant f(x)$ donc $0 \neq f \in N_C(x)$.
2. On considère $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et $C := \{x \in E : |x_i| \leqslant 1/i \forall i\}$. C est un convexe (facile) fermé car $p_i : x \to |x_i|$ est contractante donc $p_i^{-1}([0, 1/i])$ est fermé par image inverse d'un fermé par une application continue, donc l'intersection C de ces fermés est fermé. $C \ni 0 = \lim_{n\to\infty}(2/n 1_{i=n})_{i\geqslant 0} \in \overline{C^c}$ donc $0 \in \partial C$, mais montrons que $N_C(0) = 0$.

   En effet si $f \in N_C(0)$ pour $c \in C$ on a $f(c) \leqslant 0, f(-c) \leqslant 0$ donc $f(C) = 0$ donc $f(\mathbb{R}C) = 0$ mais $Vect(e_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}C$ est dense donc $f = 0$
3. Soit C un convexe de E e.v.n. de dimension fini tel que $0 \notin C$. x_n une suite dénombrable dense dans C. Trouvons $f_n \in E'$ tel que $f_n(Conv(x_1, ...x_n)) \subset [0, \infty[$. En effet, $Conv(x_1, ...x_n) \subset C$ est compact (image d'un compact $\{(t_1, ...t_n) \in [0, 1]^n \sum t_i = 1\}$ par une application continue $(t_1, ...t_n) \mapsto \sum t_i x_i$) et disjoint de $\{0\}$ donc on le sépare par f_n par Hahn-Banach et on peut prendre $||f_n|| = 1$ par homogénéité.

   Par compacité, on prend une sous-suite convergente $f_n \to f$ que l'on peut trouver $f \in E'$ avec $||f|| = 1$ et donc $f(C) \subset [0, \infty[$. (car $f_m(x_n) \geqslant 0$ pour m grand donc $f(x_n) \geqslant 0$ et donc le résultat par densité)
4. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $x \in \partial C$. Donc $x_n \in C^c, x_n \to x$. $\{x_n\}$ et C sont deux convexes disjoints non-vides. Soit $f_n \in E'$ avec $f_n(x_n) \leqslant f_n(c)$ $\forall c \in C$ (par la question précédente). Quitte à extraire, on a $||f_n|| = 1$ $f_n \to f$ (par compacité des boules) donc en passant à la limite dans l'inégalité $f(x) \leqslant f(c)$ $\forall c \in C$. donc $C \subset \overline{C} \subset f^{-1}([f(x), \infty[)$ donc $Int(\overline{C}) \subset Int(f^{-1}([f(x), \infty[)) = f^{-1}(]f(x), \infty[)$ donc comme $f(x) \notin]f(x), \infty[$, on a $x \notin Int(\overline{C})$

   Bien sûr $Int(C) \subset Int(\overline{C})$ et réciproquement si $x \in Int(\overline{C})$ alors $x \notin \partial C$ donc $x \in \overline{C} \cap (\partial C)^c = Int(C)$.
5. Soit C un convexe de R^n , $x \in \partial C$. Montrons que $N_C(x) \neq \{0\}$. C est convexe et si $x_n \in C^c, x_n \to x$ en séparant $C - x_n$ et 0 par 3. on a $f_n(C) \leqslant f_n(x_n)$ avec $||f_n|| = 1$. Par compacité on extrait $f_n \to f$ donc $||f|| = 1$ qui convient : $0 \neq f \in N_C(x)$
6. Cela vient du 3 appliqué à $C - D$de sorte que :

   $$\forall (x, y) \in C \times D \qquad \langle f, x\rangle \leqslant \langle f, y\rangle.$$

   [$0 \notin C - D$ équivaut à C et D disjoint)

Exercice 2 Soient C et D des parties non vides dans E e.v.n., D étant convexe et fermé. On définit la fonction d'appui $H_C : E' \to]-\infty, +\infty]$ par

$$H_C(f) := \sup_{x \in C} f(x).$$

1. Montrons que H_C est positivement homogène et sous-additive. $H_C(tf) = \sup_{x \in C} tf(x) = tH_C(f)$ pour $t > 0$. et pour $x \in C, f(x) \leqslant H_C(f)$ donc

$$H_C(f+g) = \sup_{x \in C}(f+g)(x) \leqslant \sup_{x \in C} H_C(f) + H_C(g) = H_C(f) + H_C(g).$$

   Donc $H_C(tx + (1-t)y) \leqslant H_C(tx) + H_C((1-t)y) = tH_C(x) + (1-t)H_C(y)$ en appliquant successivement pour $t > 0, (1-t) > 0$ donc H_C est convexe.
2. Montrons que $C \subset D$ si et seulement si $H_C \leqslant H_D$. Si $C \subset D$ alors le sup sur C est plus petit que le sup sur D donc $H_C \leqslant H_D$. Réciproquement on utilise que D est convexe fermé. Soit $x \in C$ on a $f(x) \leqslant H_C(x) \leqslant \sup_{y \in D} f(y)$, donc par l'exo 7.1 du TD 2 (qui vient de Hahn-Banach 2ème forme géométriqe) $x \in \overline{Conv(D)} = D$. Donc on déduit $C \subset D$. Si C et D sont convexes fermés, on peut échanger le rôle de C et D et obtenir que deux parties fermées convexes coïncident ssi leurs fonctions d'appui coïncident.
3. Soit S un sous-ensemble non vide et borné de E. Prouver que $C \subset D$ si et seulement si $C + S \subset D + S$.
   Bien sûr si $C \subset D$ alors $C + S \subset D + S$.
   MOntrons la réciproque en observant que

$$H_{C+S}(f) = \sup_{s \in S, x \in C} f(x) + f(s) = H_S(f) + H_C(f)$$

   Si $C + S \subset D + S$ on déduit que l'on a

$$H_C(f) + H_S(f) \leqslant H_{C+S}(f) \leqslant H_{D+S}(f) \leqslant H_D(f) + H_S(f)$$

   (on remarque que la preuve directe de l'inégalité du 2 n'utilise pas D convexe fermé seulement la réciproque caractérisant de l'inclusion par l'inégalité)
   Or si S non vide $H_S(f) > -\infty$ et comme S borné $H_S(f) \leqslant ||f|| \sup_{s \in S} ||s|| < \infty$ donc comme H_S est fini, on déduit par soustraction :$H_C(f) \leqslant H_D(f)$ donc $C \subset D$
4. Voici des contrexemples montrant que l'équivalence est fausse en général (même en dimension 1) si S n'est pas borné (pour tout C, D on $C + \mathbb{R} = R \subset D + \mathbb{R}$), ou si D n'est pas fermé ($[0,1[+[0,1[=[0,2[=[0,1[+[0,1]$ mais on a $[0,1] \not\subset [0,1[$, ou si D n'est pas convexe ($\{0,1\} + [0,1] = [0,2] = [0,1] + [0,1]$ mais on a $[0,1] \not\subset \{0,1\}$).

Exercice 3 (cf TD)

Exercice 4 Soient D un ensemble compact convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $f : [a,b] \to D$ une fonction mesurable. Prouver que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in D.$$

Exercice 5

Exercice 6 (cf TD)

Exercice 7 Vérifier que si f est C^2 sur $C \subset E = \ell^2(I)$ un convexe ouvert et que pour tout $x \in C, h \in E$:

$$d^2 f(x)(h,h) \geqslant \alpha ||h||_2^2$$

pour $\alpha > 0$ alors f est strictement convexe.

Il suffit de noter que $f(x) - \alpha\frac{||x||_2^2}{2}$ est C^2 à dérivée seconde positive donc convexe par le cours et que $\alpha||x||_2^2$ est strictement convexe et on conclut en faisant la somme.

Pour la stricte convexité en effet pour $x \neq y$,

$$||tx+(1-t)y||_2^2-t||x||_2^2-(1-t)||y||_2^2 = (t^2-t)||x||_2^2+[(1-t)^2-(1-t)]||y||_2^2+2t(1-t)\langle x,y\rangle = -t(1-t)||x-y||$$

car $(t^2-t) = [(1-t)^2-(1-t)] = -t(1-t)$ donc c'est strictement négatif pour $t \in]0,1[, x \neq y$ c'est la convexité stricte.

Exercice 8 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^3 + 18x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 16y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y^3 + 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx^2 + 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6yx^2$$

Comme

$$\begin{aligned} d^2f((h,k),(h,k)) &\geqslant (2y^3+18)h^2 + (6yx^2+16)k^2 + 6yx^2kh \\ &\geqslant (16-2\epsilon)h^2 + (10-6\epsilon)k^2 - (6+6\epsilon)(\frac{k^2+h^2}{2}) = (13-8\epsilon)h^2 + (7-9\epsilon)k^2 \end{aligned}$$

pour$|y|, |x| < \sqrt[3]{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ (par l'inégalité arithmetico-géométrique et inégalités directe), on déduit de l'exercice précédent la convexité stricte (dès que $\epsilon < 7/9$) sur cet ensemble donc sur A.

2. Par continuité vu la compacité de A (fermé borné en dimension finie), la fonction admet un minimum, il est unique par convexité stricte, et on trouve la solution en cherchant les minima locaux. On remarque que $(0,0)$ annule le gradient, c'est donc un point critique sur l'ouvert $Int(A)$, donc c'est l'unique minimum strict sur tout A (la convexité stricte implique l'unicité d'un minimum local).

Exercice 9 Soit $g_1, ..., g_n$ des fonctions convexes C^1 définies $\mathbb{R}^m$.

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1,...,n\}, g_i(x) \leqslant 0\}$ tel qu'il existe $x_0 \in A$ avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i.

1. Soit $x \in A$ avec $g_1(x) = ... = g_l(x) = 0$ (contraintes actives) et $g_{l+1}(x) < 0, ...g_n(x) < 0$. Montrons que $N_A(x) = \{f \in E' : f(y-x) \leqslant 0, y \in A\} = \{\sum_{i=1}^l \lambda_i dg_i(x), \lambda_i \geqslant 0\}$
   Comme g_i convexe on a pour tout x, y $g_i(y) - g_i(x) \geqslant dg_i(x)(y-x)$ donc si ,$y \in A$ et x comme ci dessus pour $i = 1, ..., l$ $dg_i(x)(y-x) \leqslant 0$ d'où :

$$\{\sum_{i=1}^{l} \lambda_i dg_i(x), \lambda_i \geqslant 0\} \subset N_A(x)$$

   Réciproquement, si $-f \in N_A(x)$ et soit h tel que $dg_i(x)(h) < 0, i = 1, ..., l$, alors $g_i(x+th) - g_i(x) = tdg_i(x)(h) + o(t)$ donc $g_i(x+th) < 0$ pour $t > 0$ petit, et $i = 1, ...l$ De plus pour t assez petit comme $g_{l+1}(x) < 0, ...g_n(x) < 0$, on déduit par continuité $g_{l+1}(x+th) < 0, ...g_n(x+th) < 0$ pour t petit.

D'où $x+th \in A$ pour tout $t > 0$ assez petit. donc $f(x+th-x) \leqslant 0$ donc en particulier $f(h) \leqslant 0$ et on ne peut pas avoir $-f(h) < 0$. DOnc $-f, dg_1(x), ..., dg_l(x)$ vérifient la première condition de l'exercice 10 du TD2 donc sont positivement linéairement indépendants. On a donc des λ_i positifs non tous nuls tel que $-\lambda_0 f + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i dg_i(x) = 0$

Si on avait $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i dg_i(x) = 0$, il n'ya aurait pas de h tel que $dg_i(x)(h) < 0$ pour tout $i = 1, ..., l$ mais si on prend $h = x_0 - x$ on a $dg_i(x)(h) \leqslant g_i(x_0) - g_i(x) = g_i(x_0) < 0$ pour tout $i = 1, ..., l$ ce qui implique donc $\lambda_0 \neq 0$ et l'égalité voulue.

2. Si x minimise une fonction convexe C^1 f sur A. Le cours montre que x vérifie $df(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dg_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geqslant 0$ avec $\lambda_i = 0$ si la i ème contrainte est active car c'est la condition $0 \in \partial f(x) + N_A(x)$ du cours (vu le $N_A(x)$ du 1.

3. (cf TD)