

### Feuille de TD 3

Autour des théorèmes de Hahn-Banach. Ensembles convexes.

#### Exercice 1

Soit  $E = \{u \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$  avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$

1. Montrer que  $E = ev_0^{-1}(\{0\})$  est fermé comme image réciproque d'un fermé par l'application linéaire continue  $ev_0(u) = u(0)$ , inclus dans l'espace de Banach  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  donc c'est un espace de Banach.
2. Montrons que  $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$  définit  $f \in E'$ .  $f$  est linéaire par linéarité de l'intégrale et  $|f(u)| \leq \int_0^1 |u(t)|dt \leq \int_0^1 \|u\|_\infty dt = \|u\|_\infty$  donc  $f$  est continue et  $\|f\|_{E'} \leq 1$ .
3. Montrons que  $\|f\|_{E'} = 1$ . Il suffit de noter que  $u_n = x^{1/n}$  vérifie  $\|u_n\|_E \leq 1$  et  $f(u_n) = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ .
4. Montrons qu'il n'existe pas  $u \in E$  avec  $f(u) = 1$  et  $\|u\|_\infty \leq 1$ . En effet, comme  $u$  est continue en 0 il existe  $n$  tel que pour  $|x| \leq 1/n$ ,  $|u(x)| = |u(0) - u(x)| \leq 1/2$  donc

$$|f(u)| \leq \int_0^{1/n} |u(t)|dt + \int_{1/n}^1 \|u\|_\infty dt \leq \frac{1}{2n} + (1 - \frac{1}{n}) < 1$$

donc  $f(u) \neq 1$ .

5. Comme en cours il existe  $u \in E''$  tel que  $u(f) = \|f\|_{E'} = 1$  et  $\|u\|_{E''} = 1$ . Il suffit de prolonger  $u(\lambda f) = \lambda$  de  $G = \mathbb{R}f \subset E'$  qui vérifie  $|u(\lambda f)| = |\lambda| \leq \|\lambda f\|_{E'}$  à  $E'$  par Hahn-Banach. Comme la forme sur  $G$  est de norme 1, on peut trouver  $\|u\|_{E''} = 1$ .
6. Montrons par l'absurde que  $J(E) \neq E''$  ( $E$  n'est pas réflexif). En effet, si on avait  $J(E) = E''$  le  $u$  de la question précédente serait un  $u = J(v)$   
Or  $u(f) = f(v) = 1$  et comme  $J$  est isométrique  $\|v\|_E = \|u\|_{E''} = 1$  ce qui contredit le point 4.
7. Comme indiqué en TD on considère

$$T : C = (C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} \oplus^\infty E$$

Par définition, de la somme directe  $\|T(u)\| = \max(|u(0)|, \|u - u(0)\|_\infty) \leq \|u\|_\infty + |u(0)| \leq 2\|u\|_\infty$ .

De plus il est facile de voir que  $T^{-1}(\lambda, v) = \lambda + v$  (noter que comme  $v \in E$ ,  $T^{-1}(\lambda, v)(0) = \lambda + v(0) = \lambda$ ) Or on a

$$\|T^{-1}(\lambda, v)\|_\infty \leq |\lambda| + \|v\|_\infty \leq 2 \max(|\lambda|, \|v\|_\infty)$$

Donc finalement pour tout  $u \in C$  :

$$\frac{1}{2}\|u\|_\infty = \frac{1}{2}\|T^{-1}(T(u))\|_\infty \leq \|T(u)\| \leq 2\|u\|_\infty.$$

8. Montrons que

$$I(\lambda, u)(\mu, f) = \lambda\mu + u(f)$$

définit (formellement par la même formule) des isométries  $I : \mathbb{R} \oplus^1 E' \rightarrow (\mathbb{R} \oplus^\infty E)'$  et  $I : \mathbb{R} \oplus^\infty E'' \rightarrow (\mathbb{R} \oplus^1 E)'$

D'abord dans le premier cas :

$$|I(\lambda, u)(\mu, f)| \leq \max(|\mu|, \|f\|_E)(|\lambda| + \|u\|_{E'})_{\mathbb{R} \oplus^1 E'} = \|(\lambda, u)\|_{\mathbb{R} \oplus^1 E'} \|(\mu, f)\|_{\mathbb{R} \oplus^\infty E}$$

et dans le second cas

$$|I(\lambda, u)(\mu, f)| \leq (|\mu| + \|f\|_{E'}) \max(|\lambda|, \|u\|_{E''}) = \|(\lambda, u)\|_{\mathbb{R} \oplus^\infty E''} \|(\mu, f)\|_{\mathbb{R} \oplus^1 E'}$$

d'où  $I$  bien défini et dans chaque cas  $\|I\| \leq 1$

Réciproquement, si  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \oplus^1 E'$ , on pose  $\mu = |\lambda|/\lambda 1_{\lambda \neq 0}$  et on fixe  $\epsilon > 0$  et on prend  $f$  avec  $\|f\|_E \leq 1$  tel que  $u(f) = |u(f)| \geq \|u\|_{E'} - \epsilon$

Donc

$$|I(\lambda, u)(\mu, f)| = |\lambda| + |u(f)| \geq \|(\lambda, u)\|_{\mathbb{R} \oplus^1 E'} - \epsilon$$

et comme  $\|(\mu, f)\|_{\mathbb{R} \oplus^\infty E} \leq 1$ , on trouve :

$$\|I(\lambda, u)\|_{(\mathbb{R} \oplus^\infty E)'} \geq \|(\lambda, u)\|_{\mathbb{R} \oplus^1 E'} - \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \|(\lambda, u)\|_{\mathbb{R} \oplus^1 E'}$$

La deuxième propriété d'isométrie est similaire. Si  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \oplus^\infty E''$  avec le même  $\mu$ , avec on a  $\|(\mu, 0)\| \leq 1$  et

$$|I(\lambda, u)(\mu, 0)| = |\lambda|$$

et on peut prendre  $f \in E'$  avec  $\|f\|_{E'} = 1$  et  $u(f) = \|u\|_{E''}$  (cf cours et question 5).

$$|I(\lambda, u)(0, f)| = |u(f)| = \|u\|_E$$

donc

$$\|I(\lambda, u)\|_{(\mathbb{R} \oplus^1 E)'} \geq \max(|\lambda|, \|u\|_E) = \|(\lambda, u)\|_{(\mathbb{R} \oplus^\infty E'')}$$

POur la surjectivité, on a la formule explicite disons pour  $F \in (\mathbb{R} \oplus^\infty E)'$

$$I^{-1}(F) = (F(1, 0), F(0, .)) \in \mathbb{R} \oplus^1 E'$$

Remarquons que comme  $T : C \rightarrow \mathbb{R} \oplus^\infty E$  est un isomorphisme (c'est à dire  $T$  et  $T^{-1}$  sont des applications linéaires continues, pas forcément isométriques. Alors  $T^t$  est aussi un isomorphisme (car  $(T \circ S)^t = S^t \circ T^t$  et  $Id^t = Id$  donc  $(T^{-1})^t$  est l'inverse de  $T^t$ ) et donc  $T^{tt}$  est aussi un isomorphisme.

Vérifions enfin que si  $T : C \rightarrow D$  est un isomorphisme :  $C$  est réflexif si et seulement si  $D$  est réflexif (on reverra cela en cours au chapitre 5). En effet, soit  $J_C : C \rightarrow C''$ ,  $J_D : D \rightarrow D''$  les applications canoniques.

pour  $f \in D', u \in C$

$$(J_D \circ T)(u)(f) = f(T(u)) = [T^t(f)](u) = [J_C(u)][T^t(f)] = T^{tt}[J_C(u)](f)$$

donc  $(J_D \circ T) = T^{tt} \circ J_C$  donc si  $C$  réflexif  $J_C(C) = C''$

$$D'' = T^{tt}[C''] = T^{tt}[J_C(C)] = J_D(T(C)) = J_D(D)$$

donc  $D$  réflexif et réciproquement par symétrie (on a utilisé la surjectivité de  $T^{tt}$ ). On déduit donc dans notre cas que si  $C$  était réflexif, alors  $D = \mathbb{R} \oplus^\infty E$  serait réflexif, mais un calcul utilisant seulement la définition et le calcul des duaux donne  $J_D(\lambda, u) = (\lambda, J_E(u))$  d'où si  $D$  était réflexif  $\mathbb{R} \oplus^\infty J_E(E) = \mathbb{R} \oplus^\infty E''$  impliquant  $J_E(E) = E''$ , en contradiction avec la question (6).

**Exercice 2** (cf TD)**Exercice 3**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f_0, f_1, \dots, f_n$  des formes linéaires sur  $E$ . Utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach pour montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

1.  $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ ;

2.  $\exists M \in [0, \infty[$  tel que

$$\forall x \in E, |f_0(x)| \leq M \max_{i=1}^n |f_i(x)|,$$

3.  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f_0)$

On ne détaille que (3) implique (1).

$\text{Im}(f_0, \dots, f_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est un s.e.v. de dimension fini donc complet donc fermé et  $(1, 0, \dots, 0)$  est un convexe compact. Ils sont disjoints si on suppose (3) car si  $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$ , (3) force  $f_0(x) = 0 \neq 1$ .

On peut donc appliquer la deuxième forme géométrique de Hahn-Banach pour obtenir  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{n+1})'$  et  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) < c < \lambda_0$$

En prenant  $x = 0$  on obtient  $\lambda_0 > 0$  en remplaçant  $x$ , par  $x/\epsilon \in E$  on obtient  $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) < c\epsilon \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} 0$   
donc

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) \leq 0$$

et en remplaçant  $x$ , par  $-x$  on obtient

$$\forall x \in E, \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x) = 0 < \lambda_0$$

En divisant par  $\lambda_0$  on obtient la condition de dépendance linéaire du (1).

**Exercice 4**

On prend  $E = \ell^2(\mathbb{N})$ , et

$$K_1 = \{x = (x_0, x_1, \dots) \in E : \forall i, x_i > 0\}, \quad K_2 = \text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$$

On a vu en TD que ces deux parties dans  $E$  sont convexes et disjointes (car tout  $x \in K_2$  vérifie  $x_n = 0$  pour  $n$  grand et ne peut donc avoir  $x_i > 0$ ). Montrons qu'il n'existe aucun  $f \in E'$  qui satisfait

$$\forall x \in K_1, y \in K_2 \quad f(x) < f(y).$$

En effet un tel  $f$  vérifie pour  $\epsilon > 0$  vu que  $x\epsilon \in K_1$

$$f(x)\epsilon < f(y).$$

soit avec  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\forall y \in K_2 \quad 0 \leq f(y).$$

Mais comme  $-y \in K_2$ ,  $f(-y) \geq 0$  donc  $K_2 \subset \text{Ker}(f)$ . Or  $K_2$  est dense dans  $E$  donc  $f = 0$  ce qui contredit l'inégalité stricte.

**Exercice 5** Montrer que  $\overline{\text{Conv}(A)}$  est le plus petit convexe fermé contenant  $A$ . (cf TD)

**Exercice 6** Soient  $E$  un e.v.n. et  $C \subset E$  une partie.

1. Montrons en utilisant le théorème de séparation de Hahn-Banach que  $x \in \overline{Conv(C)}$  si et seulement si pour tout  $f \in E'$  :

$$f(x) \leq \sup_{y \in C} f(y).$$

Pour l'implication directe  $\Rightarrow$  Si on suppose  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \in Conv(C)$  avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$  et  $c_i \in C$  on obtient en utilisant la linéarité et la positivité des  $\lambda_i$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(c_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sup_{y \in C} f(y) = \sup_{y \in C} f(y).$$

Si  $x \in \overline{Conv(C)}$  on prend  $x_n \rightarrow x, x_n \in Conv(C)$  et on étend la relation par continuité.

Pour la réciproque  $\Leftarrow$ , on raisonne par contraposé et on suppose  $x \notin \overline{Conv(C)}$ . On applique Hahn Banach au compact convexe non vide  $A = \{x\}$ , disjoint du convexe fermé non vide  $\overline{Conv(C)}$ . On obtient donc  $f \in E'$  avec la séparation stricte contredisant l'autre inégalité :

$$\sup_{y \in C} f(y) < c < f(x).$$

2. On définit le polaire et le bipolaire :

$$C^o = \{f \in E' : \forall x \in C, f(x) \leq 1\}, \quad C^{oo} = \{x \in E : \forall f \in C^o, f(x) \leq 1\}.$$

Montrons que  $C^o$  est convexe car pour  $\lambda \in [0, 1], f, g \in C^o$

$$\forall c \in C, [\lambda f + (1 - \lambda)g](c) \leq \lambda 1 + (1 - \lambda)1 = 1 \Rightarrow \lambda f + (1 - \lambda)g \in C^o$$

Si  $D \subset C$  alors la condition sur  $f \in C^o$  s'applique au élément de  $D \subset C$  donc  $C^o \subset D^o$ .

De plus  $C^{oo}$  est défini par des inéquation linéaire continue donc est fermé et convexe comme pour  $C^o$  (c'est l'intersection de  $(C^o)^o \cap J(E)$  dans le bidual. De plus par définition  $C \cup \{0\} \subset C^{oo}$  donc le plus petit convexe fermé contenant  $C$  vérifie  $\overline{Conv(C \cup \{0\})} \subset C^{oo}$ .

Montrons l'égalité

$$\overline{Conv(C \cup \{0\})} = C^{oo}$$

donc l'autre inclusion (on a vu le cas  $0 \in C$  en TD), on prend donc  $x \in C^{oo}$ , on pose  $D = C \cup \{0\}$  et on montre l'inégalité du 1. On note que  $\sup_{y \in D} f(y) \geq f(0) = 0$ .

Il y a deux cas, si  $\lambda := \sup_{y \in D} f(y) > 0$  par définition pour  $y \in D$  :

$$\frac{f(y)}{\sup_{y \in D} f(y)} \leq 1$$

donc  $f/\lambda \in D^o = C^o$ . Donc comme on suppose  $x \in C^{oo}$  on obtient

$$\frac{f(x)}{\sup_{y \in D} f(y)} \leq 1$$

soit l'inégalité voulu par positivité du dénominateur :

$$f(x) \leq \sup_{y \in D} f(y).$$

Si  $\sup_{y \in D} f(y) = 0$ , alors  $tf(d) \leq 0 \leq 1$  pour  $t > 0, d \in D$  donc  $tf \in C^o$  donc comme  $x \in C^{oo}$  :

$$f(x) \leq \frac{1}{t} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$$

et donc

$$f(x) \leq 0 = \sup_{y \in D} f(y).$$

Par le 1. on déduit donc que  $x \in \overline{\text{Conv}(C \cup \{0\})}$ .

**Exercice 7 Application aux applications orthogonales** On identifie  $(M_n(\mathbb{R}), |||\cdot|||) := L((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2))$  avec la norme subordonnée à la norme euclidienne. Soit  $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des applications orthogonales de  $\mathbb{R}^n$ . On rappelle la décomposition polaire d'une matrice  $M$ . Il existe toujours  $O$  orthogonale (i.e.  $OO^t = O^tO = 1$ ) et une matrice symétrique positive  $P$  telle que  $M = OP$ . Alors on a  $\sqrt{M^tM} = P = P^t$  (mais  $O$  n'est pas unique).

1. En utilisant la décomposition polaire et en identifiant  $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow (M_n(\mathbb{R}), |||\cdot|||)'$  par  $M \mapsto \text{tr}(M)$ , montrons que

$$[O(n)]^o \subset \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \text{tr}[\sqrt{M^tM}] \leq 1\} =: A.$$

Soit  $M \in [O(n)]^o$ , on a donc pour tout  $O' \in O(n)$ ,  $\text{Tr}(MO') \leq 1$  mais si  $M = OP$  est sa décomposition polaire, il suffit de prendre  $O' = O^t$  pour avoir  $\text{Tr}(MO') = \text{Tr}(O^tOP) = \text{Tr}(P) \leq 1$  donc  $M \in A$

2. Montrons que  $A^o = B := \{M \in M_n(\mathbb{R}), |||M||| \leq 1\}$ .

On va utiliser que comme  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)' \simeq (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  :

$$|||M||| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Mx\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} |\langle y, Mx \rangle|.$$

D'abord, on remarque que si  $N = OP$  est la décomposition polaire et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de diagonalisation de  $P$  de sorte que  $Pe_i = \lambda_i e_i$ , on a

$$|\text{Tr}(MN)| = \left| \sum_{i=1}^n \langle e_i, MOPe_i \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, MOe_i \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |||N||| = \text{tr}(P) |||M|||$$

car  $\|Oe_i\|_2 = \|e_i\|_2 \leq 1$ . Donc si  $N \in A, M \in B, \text{tr}(P) \leq 1, |||M||| \leq 1$  et donc  $|\text{Tr}(MN)| \leq 1$  donc comme c'est pour tout  $N \in A$ , on déduit  $M \in A^o$  et donc  $B \subset A^o$ .

Réciproquement, si  $M \in A^o$  soit  $x, y, \|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1$ , on pose la matrice  $N_{ij} = x_i y_j$  de sorte que  $(N^t N)_{ij} = y_i y_j \|x\|_2^2$  pour lequel  $y$  est vecteur propre de valeur propre (v.a.p)  $\|y\|_2^2 \|x\|_2^2$  et tout vecteur orthogonal à  $y$  est vecteur propre de valeur propre 0. Les v.a.p. de  $\sqrt{N^t N}$  sont donc  $(\|y\|_2 \|x\|_2, 0, \dots, 0)$  d'où

$$\text{Tr}(\sqrt{N^t N}) = \|y\|_2 \|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow N \in A.$$

Donc  $\text{Tr}(NM) \leq 1$  si  $M \in A^o$ , mais  $\text{Tr}(NM) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j M_{ji} = \langle y, Mx \rangle$  et en changeant le signe de  $N$  on déduit donc  $|\langle y, Mx \rangle| \leq 1$  et comme  $x, y$ , sont arbitraire dans la boule unité, en prenant le sup on obtient  $|||M||| \leq 1$ , donc  $A^o \subset B$ .

3. En déduire que l'inclusion du 1 est une égalité et que  $B = \text{Conv}(O(n))$ . [Pour cela montrer que tout élément de  $B$  est combinaison convexe d'au plus  $n^2$  points de  $O(n)$ , c'est un théorème de Carathéodory.] (cf TD.)