Feuille de TD 4

Ensembles convexes, espaces de Hilbert.

Exercice 1 Vérifier que si f est C^2 sur $C \subset E = \ell^2(I)$ un convexe ouvert et que pour tout $x \in C, h \in E$:

$$d^2 f(x)(h,h) \geqslant \alpha ||h||_2^2$$

pour $\alpha > 0$ alors f est strictement convexe.

Exercice 2 [Universalité de la convolution] Soit $T : L^2(R^N) \mapsto C_0^0(\mathbb{R}^N)$ linéaire, commutant avec les translations et continu. Alors il existe $g \in L^2(R^N)$ t.q. $T(f) = g \star f$.

Exercice 3 [Convergence faible] Soit $f_n = \sin(nx)$ et $g_n = |\sin(nx)|$ montrer que ces suites ne convergent pas fortement dans $L^2([0, 2\pi])$ mais bien faiblement. Calculer la limite faible.

Exercice 4 [Base de Haar]

Posons $H(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $H(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, fonction de Haar. Posons $H_k^l(x) = 2^{\frac{l}{2}} H(2^l x - k),\ \ l, k \in \mathbb{Z}$.
1) Dessiner les fonctions de Haar pour $l = 1, 2$ et montrer qu'elles forment un système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$.
2)Considérer l'ensemble des fonctions de Haar supportées sur $[0, 1]$, constantes sur les intervalles dyadiques de taille 2^{-j}. Compter combien il y en a. Soit S_j le sous espace de $L^2([0, 1])$ qu'elles engendrent. Caractériser S_j en tant que sous-espace de $L^2([0, 1])$.
3) Montrer que le système de Haar forme une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soient H un espace de Hilbert et $u \in B(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $||u(x)||_2 = ||x||_2$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle ux, uy \rangle = \langle x, y \rangle$
3. $u^* u = Id$

(Indication :penser à l'identité de polarisation).

Exercice 6

Soient H un espace de Hilbert et $v \in B(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. Pour tout $x \in Ker(v)^\perp$, on $||v(x)||_2 = ||x||_2$
2. $v^* v v^* = v^*$
3. $v v^* v = v$
4. Pour tout $x \in Ker(v^*)^\perp$, on $||v^*(x)||_2 = ||x||_2$

On dit que v est une isométrie partielle si (1) est vérifié. (ce qui équivaut donc à v^* isométrie partielle)

Exercice 7

Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé. Soit P une projection de H sur F.

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale
2. $||P|| = 1$

3. $|\langle P(x), x\rangle| \leqslant ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice 8 Polynômes de Laguerre

Soit μ la mesure sur $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de lebesgue c'est-à-dire $\mu(A) = \int_A e^{-x} dx$. Soit

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^n).$$

Montrer que L_n est une famille orthogonale de polynômes de $L^2([0, \infty[, \mu)$.

Exercice 9 Montrer que la famille indicée par les parties finies de $\mathbb{N}^*$, $(w_I)_{I \in P_f(\mathbb{N}^*)}$ définie par

$$w_I(x) = \prod_{i \in I} w_i(x), \quad \text{avec } \; w_n(x) = (-1)^{\lfloor 2^n x \rfloor}$$

est une base hilbertienne de $L^2([0,1], Leb)$. (Elle est appelée base de Walsh).

Exercice 10 Deux Identités du parallélogramme généralisées Soit H un espace de Hilbert et $x_1, ..., x_n \in H$

1. Montrer que pour $t \in]0, 1[$, on a :

$$||tx_1 + (1-t)x_2||^2 + t(1-t)||x_1 - x_2||^2 = t||x_1||^2 + (1-t)||x_2||^2.$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n} ||\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2$$

3. Supposez par l'absurde qu'il existe $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ in isomorphisme (linéaire) et considérer $x_i = T(e_i)$ et obtenir une contradiction si $1 \leqslant p < 2$
4. Montrer que si $p \neq 2$, on a $\ell^p(\mathbb{N}) \not\simeq \ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 11 Soit $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geqslant 0 \; p.p.\}$.

Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f 1_{\{f \geqslant 0\}}$.