Correction de la Feuille de TD 4
Convergence faible, Espaces de Hilbert.

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\ell^p(\mathbb{N})(1 < p < +\infty)$, où $x_n = (y_{i,n})_{i\geqslant 0}$.

On note $\langle u, v\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$ l'appariement de dualité entre $u \in \ell^p(\mathbb{N}), v \in \ell^q(\mathbb{N}) \simeq (\ell^p(\mathbb{N}))', 1/p + 1/q = 1$ Prouvons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 ssi la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $\ell^p(\mathbb{N})$ et pour chaque i on a $\lim_{n\to\infty} y_{i,n} = 0$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, elle est bornée par la conséquence de Banach-Steinhauss vue en cours. De plus, pour $e_i \in \ell^q(\mathbb{N})$, $\langle x_n, e_i\rangle = y_{i,n} \to_{n\to\infty} 0$

Réciproquement, on suppose x_n bornée par M et $\lim_{n\to\infty} y_{i,n} = 0.$, soit $v \in \ell^q(\mathbb{N}), \epsilon > 0$, on prend N telle que $(\sum_{n=N}^{\infty} |v_n|^q)^{1/q} \leqslant \epsilon/2M$. Par somme finie $\sum_{i=0}^{N-1} y_{i,n} v_i \to_{n\to\infty} 0$ donc soit M tel que si $n \geqslant M$ alors $|\sum_{i=0}^{N-1} y_{i,n} v_i| \leqslant \epsilon/2$

enfin pour $n \geqslant M$, en décomposant les premiers termes et le reste et appliquant Hölder au reste :

$$|\langle x_n, v\rangle| \leqslant |\sum_{i=0}^{N-1} y_{i,n} v_i| + (\sum_{i=N}^{\infty} |y_{n,i}|^p)^{1/p} (\sum_{i=N}^{\infty} |v_i|^q)^{1/q} \leqslant \epsilon/2 + ||x_n||_p \epsilon/2M \leqslant \epsilon.$$

Donc on a bien $\langle x_n, v\rangle \to 0$ et donc x_n converge faiblement vers 0.

Exercice 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x dans E espace de Banach. On pose

$$K_n = \overline{Conv\{x_n, x_{n+1}...\}}.$$

Montrons que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$

Comme (par le lemme de Mazur ou la caractérisation des convexes faiblement fermés) $\overline{Conv\{x_n, x_{n+1}...\}} = \overline{Conv\{x_n, x_{n+1}...\}}^{\sigma(E,E')}$ donc la limite faible x de $(x_{n+m})_{m\geqslant 0}$ est dedans, $x \in K_n$. Réciproquement, si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, et $f \in E'$, comme f est linéaire $f(Conv\{x_n, x_{n+1}...\}) = Conv\{f(x_n), f(x_{n+1})...\}$ et comme f est continue

$$f(\overline{Conv\{x_n, x_{n+1}...\}}) \subset \overline{f(Conv\{x_n, x_{n+1}...\})} = \overline{Conv\{f(x_n), f(x_{n+1})...\}}.$$

(attention pas d'égalité a priori sauf dans un espace réflexif par des arguments de compacité).

Or si $t_i \geqslant 0 \sum t_i = 1, n_i \geqslant n$, $f(x) = \sum t_i f(x)$ donc

$$|\sum t_i f(x_{n_i}) - f(x)| \leqslant \sum t_i |f(x_{n_i}) - f(x)| \leqslant \sup_{k\geqslant n} |f(x_k) - f(x)|$$

donc pour tout point $z \in Conv\{f(x_n), f(x_{n+1})...\}$

$$|z - f(x)| \leqslant \sup_{k\geqslant n} |f(x_k) - f(x)|$$

donc en prenant une suite convergente vers un point de l'adhérence aussi pour tout $z \in \overline{Conv\{f(x_n), f(x_{n+1})...\}}$ donc pour $z = f(y)$ soit

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sup_{k\geqslant n} |f(x_k) - f(x)| \o_{n\to\infty} 0$$

par la convergence faible. Donc $f(y) = f(x)$ pour tout $f \in E'$ donc par conséquence de Hahn-Banach, $y = x$ d'où $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \{x\}$ et l'égalité.

Exercice 3 (cf TD)

Exercice 4 On prend $E := \ell^p(\mathbb{N})$, $1 < p < +\infty$, et l'on désigne par e_n l'élément de E dont tous les termes sont nuls à part le n-ième, qui vaut 1.

1. (cf TD)
2. On pose $y_{n,m} := e_n + ne_m$. Montrer que l'ensemble

$$X := \{y_{n,m} : m > n\}$$

est normiquement fermé dans E. Pour une suite y, on note $y(n) = y_n$ pour limiter les indices. On prend $n \geqslant 1$. $(n, m) \neq (p, q)$ des indices comme ci-dessus, si $n \neq p$ supposons $n < p$ alors $(y_{n,m} - y_{p,q})(n) = y_{n,m}(n) = 1$ (tous les autres indices sont non nul sont strictement plus grand donc $||y_{n,m} - y_{p,q}||_p \geqslant 1$ (idem en évaluant en p si $p < n$.

Si $n = p$ et $m \neq q$ on suppose de même $m < q$ $(y_{n,m} - y_{n,q})(q) = n$ d'où encore $||y_{n,m} - y_{p,q}||_p \geqslant 1$ (et de même pour $q < m$).

Enfin si $n = 0$ $y_{0,m} = e_0$ et dès que $y_{p,q} \neq y_{0,m}$ soit dès que $p > 1$ $y_{0,m} - y_{p,q}(0) = 1$ donc de même $||y_{0,m} - y_{p,q}||_p \geqslant 1$

En bilan, pour tout $x \neq y \in X$, $||x - y||_p \geqslant 1$ donc X est discret donc fermé (tout suite convergente (pour la norme) d'éléments de X doit être stationnaire donc converge vers un point de X).

3. Montrons que L'ensemble X admet 0 comme point d'adhérence faible. On veut donc voir que pour tout voisinage fondamental de 0, $V = \{y \in E, |f_i(y)| < \epsilon, i = 1, ..., s\}$ $,f_i \in E' = \ell^q(\mathbb{N}), \epsilon > 0$ on a $V \cap X \neq \emptyset$. Comme $f_i \in \ell^q(\mathbb{N}), q < \infty$ $f_i(n)$ tend vers 0 Or

$$\langle y_{n,m}, f_i\rangle = f_i(n) + nf_i(m)$$

donc on peut prendre N tel que pour tout i $|f_i(N)| \leqslant \epsilon/2$ et une fois N fixé, on prend $M > N$ avec $|f_i(N)| < \epsilon/2N$ de sorte que $|\langle y_{n,m}, f_i\rangle| < \epsilon$ et donc $y_{N,M} \in V$ comme voulu.

Par contre montrons qu'aucune suite dans E ne converge faiblement vers 0. En effet si $y_{n_k,m_k} \rightharpoonup_{k\to\infty} 0$ on montre que $n_k \to \infty$ car si N fixé, pour le nombre fini d'indices $i \leqslant N$ on peut trouver k grand tel que $|y_{n_k,m_k}(i)| \leqslant 1/2 < y_{n_k,m_k}(n_k)$ de sorte que $n_k > N$ (puisque il ne peut pas être parmi les valeurs inférieures).

Or $||y_{n_k,m_k}||_p \geqslant |y_{n_k,m_k}(m_k)| = n_k \to \infty$ donc (y_{n_k,m_k}) n'est pas bornée, ce qui contredit sa convergence faible.

Exercice 5 (cf TD)

Exercice 6 Soit E un Banach de dimension infinie. On démontre que l'espace topologique $(E, \sigma(E, E'))$ n'est pas métrisable. Supposons par l'absurde que la topologie faible soit associée à une métrique d. Soit $U_n = \{x \in E, : d(0, x) < 1/n\}$ que l'on suppose donc faiblement ouvert.

1. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de E' telle que tout $g \in E'$ soit une combinaison linéaire finie des f_n. [Indication Utiliser l'exercice 3 du TD2]
2. En déduire que $dim(E') < +\infty$ (utiliser le lemme de Baire) et conclure.

Exercice 7 **Propriété de Schur de $\ell^1(\mathbb{N})$.** On veut montrer que dans $\ell^1(\mathbb{N})$ une suite converge faiblement si et seulement si elle converge normiquement. On va utiliser le lemme de Baire.

1. Rappeler pourquoi la convergence normique implique la convergence faible. (cf TD)

2. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{Z}, |z| = 1\}$. $\Omega = \Gamma^{\mathbb{N}}$. Vérifier que Ω, muni de la topologie produit, est un espace métrique complet. On écrit $\omega = (Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$. On rappelle que la topologie produit (comme Γ est borné, sinon il faut ajouter une troncation sur $|Z_n(\omega_1) - Z_n(\omega_2)|$) vient par exemple de la métrique

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |Z_n(\omega_1) - Z_n(\omega_2)|.$$

Comme Γ est compact donc Ω aussi (par le théorème de Tychonov) et métrisable, donc il est complet.

3. On suppose maintenant que (f_p) converge faiblement vers 0. Par l'absurde, supposons que pour $\forall q \geqslant p, \|f_q\|_1 \geqslant 3a$ pour $a > 0$. Posons

$$G_q = \{\omega \in \Omega : \left|\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_q(n)\right| \leqslant a\}$$

et

$$F_p = \cap_{q\geqslant p} G_q.$$

Montrons que $Int(F_p) = \emptyset$. Par contraposée on montre $Int(F_p) \neq \emptyset$ implique $\exists q \geqslant p, \|f_q\|_1 \leqslant 3a$.
En effet, si $B(x, \epsilon) \subset F_p$ alors soit N tel que $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{2^n} \leqslant \epsilon/2$. On fixe q tel que $\sum_{i=0}^{N-1} |f_q(i)| \leqslant a$ (comme ceci tend vers 0 en q).
Soit $Z_i(\omega) = Z_i(x), i < N$ et $Z_i(\omega) \in \Gamma$ tel que $Z_i(\omega) f_q(i) = |f_q(i)|$ pour $i \geqslant N$ de sorte que $d(\omega, x) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{2^n} \leqslant \epsilon/2$ donc $\omega \in F_p \subset G_q$. Donc $|\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_q(n)| \leqslant a$
Or par inégalité triangulaire vu que $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_q(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_q(n)|$, on a

$$||f_q||_1 =\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} |f_q(n)| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_q(n)\right| + \left|\sum_{n=1}^{N-1} Z_n(\omega) f_q(n)\right| \leqslant a + 2\sum_{n=1}^{N-1} |f_q(n)| \leqslant 3a$$

(la dernière inégalité par le choix de q) Ceci donne l'inégalité voulue et conclut la preuve par contraposée.

4. En terme probabiliste (comme pour le lemme de Borel-Cantelli),

$$\bigcap_{p\geqslant 1} F_p^c = \limsup_{n\to\infty} G_n^c = \bigcap_{p\geqslant 1} \bigcup_{q\geqslant p} G_q^c.$$

En utilisant le lemme de Baire car Ω complet, on obtient que $\bigcap_{p\geqslant 1} F_p^c$ est dense comme une intersection dénombrable d'ouvert dense (c'est un substitut topologique d'avoir la lim sup de probabilité 1), donc est non-vide. SOit donc $\omega \in \bigcap_{p\geqslant 1} F_p^c$. Regardons $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Trouvons une sous-suite f_{p_k} tel que $\omega(f_{p_k}) \not\to 0$. On la construit par récurrence, car on sait que pour tout p (disons p_k) il existe q tel que $\omega \in G_q^c$ donc $\omega(f_q)| \geqslant a$ et on prend ce q pour p_{k+1} de sorte que $\omega(f_{p_k})| \geqslant a$ pour tout a et donc $\omega(f_{p_k}) \not\to 0$. Ceci contredit l'hypothèse que (f_p) converge faiblement vers 0. Donc pour toute suite (f_p) convergeant faiblement vers 0 on ne pouvait pas trouver de suite extraite (f_{k_p}) telle qu'il existe p tel que $\forall q \geqslant p, \|f_{k_q}\|_1 \geqslant 3a$ (sinon on trouve une contradiction car cette sous-suite ne peut converger faiblement). Autrement dit il existe p tel que $\forall q \geqslant p, \|f_q\|_1 \leqslant 3a$ (sinon on extrait facilement une sous-suite comme indiquée). Comme $a > 0$ arbitraire, f_q converge donc normiquement vers 0. Par translation, toute suite faiblement convergente est normiquement convergente dans $\ell^1(\mathbb{N})$.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé différent de $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F.

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale
2. $||P|| = 1$
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leqslant ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Si P est la projection orthogonale on a vu en cours que P est contractante donc $||P|| \leqslant 1$, de plus si $F \neq \{0\}$ il existe $x \in F$ avec $||x|| = 1$ et comme $P(x) = x$ on déduit $||P|| \geqslant 1$ (car $||P(x)|| = ||x||$).

Si on suppose (2), comme par Cauchy-Schwarz et la def de la norme subordonnée $|\langle P(x), x\rangle| \leqslant ||x||\ ||P(x)|| \leqslant ||P||\ ||x||^2 \leqslant ||x||^2$ on a donc (3)

Supposons donc finalement (3) on montre que $Im(P)^{\perp} \subset Ker(P)$. Soit $z \in Im(P)^{\perp}$ et

Soient $t > 0$ et $z_t = z + tP(z)$. $P(z_t) = (1+t)P(z)$ et

$$\langle P(z_t), z_t\rangle = (1+t)\langle P(z), z + tP(z)\rangle = (1+t)t||P(z)||^2 \geqslant 0$$

car $P(z) \in Im(P)$ et $z \in Im(P)^{\perp}$ sont orthogonaux.

Donc $|\langle P(z_t), z_t\rangle| = \langle P(z_t), z_t\rangle \leqslant ||z_t||^2$ et donc $\langle P(z_t), z_t\rangle \in [0, ||z_t||^2]$ et donc

$$\langle (I - P)(z_t), z_t\rangle \geqslant 0.$$

Or $(I-P)(z_t) = (I-P)(z) + t(I-P)(P(z)) = (I-P)(z)$ et par orthogonalité de z et $P(z)$ on a :

$$\langle (I-P)(z), z + tP(z)\rangle = ||z||^2 + t\langle (I-P)(z), P(z)\rangle = ||z||^2 - t||P(z)||^2$$

et donc on obtient donc $||z||^2 - t||P(z)||^2 \geqslant 0$ soit $||P(z)||^2 \leqslant \frac{||z||^2}{t}$et donc avec $t \to \infty$ on a $||P(z)|| = 0$.

En bilan, $Im(P)^{\perp} \subset Ker(P)$, et donc en passant à l'othogonal $Ker(P)^{\perp} \subset (Im(P)^{\perp})^{\perp} = Im(P)$ puisque $Im(P) = F$ est fermé. DOnc soit $x + y \in Im(P) \oplus Im(P)^{\perp}$ donc la décomposition de H en somme directe orthogonale. On a $P(x+y) = P(x) + P(y) = P(x) = x$ car $y \in Ker(P)$ donc P est bien la projection orthogonale.