Feuille de TD 4

Ensembles convexes, espaces de Hilbert.

Exercice 1 Séparation de Hahn-Banach en dimension finie

Soit C un convexe d'un e.v.n E et soit $x \in C$. On rappelle que le cône normal à C en x (au sens de l'analyse convexe) est l-ensemble

$$N_C(x) := \{f \in E' : \forall c \in C, f(c-x) \leqslant 0\}.$$

1. Montrons que si C est un convexe d'intérieur non vide, alors $N_C(x) \neq \{0\}$ pour tout $x \in \partial C$ (la frontière de C).

   Si $x \in \partial C$ on a $\{x\}$ et $Int(C)$ sont des convexes non-vides disjoints, donc par la 1ère forme géométrique de Hahn-Banach on peut les séparer, donc on a $f \in E'$ avec $f(u) < f(x)$ pour tout $u \in Int(C)$. DOnc $f \neq 0$ et comme $C \subset \overline{C} = \overline{Int(C)}$ (par le corollaire du cours utilisant la jauge de C) on obtient en passant à lalimite pour tout $u \in C$, $f(u) \leqslant f(x)$ donc $0 \neq f \in N_C(x)$.
2. On considère $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et $C := \{x \in E : |x_i| \leqslant 1/i \forall i\}$. C est un convexe (facile) fermé car $p_i : x \to |x_i|$ est contractante donc $p_i^{-1}([0, 1/i])$ est ferùé par image inverse d'un fermé par une application continue, donc l'intersection de fermés C est fermé. $C \ni 0 = \lim_{n\to\infty}(2/n 1_{i=n})_{i\geqslant 0} \in \overline{C^c}$ donc $0 \in \partial C$, mais montrons que $N_C(0) = 0$.

   En effet si $f \in N_C(0)$ pour $c \in C$ on a $f(c) \leqslant 0, f(-c) \leqslant 0$ donc $f(C) = 0$ donc $f(\mathbb{R}C) = 0$ mais $Vect(e_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}C$ est dense donc $f = 0$
3. Soit C un convexe de E e.v.n. de dimension fini tel que $0 \notin C$. x_n une suite dénombrable dense dans C. Trouvons $f_n \in E'$ tel que $f_n(COnv(x_1, ...x_n)) \subset [0, \infty[$. En effet $COnv(x_1, ...x_n) \subset C$ est compact (image d'un compact $\{(t_1, ...t_n) \in [0, 1]^n \sum t_i = 1\}$ par une application continue $(t_1, ...t_n) \mapsto \sum t_i x_i$) et disjoint de $\{0\}$ donc on le sépare par f_n par Hahn-Banach et on peut prendre $||f_n|| = 1$ par homogénéité.

   Par compacité, on prend une sous-suite convergente $f_n \to f$ que l'on peut trouver $f \in E'$ avec $||f|| = 1$ et donc $f(C) \subset [0, \infty[$. (car $f_m(x_n) \geqslant 0$ pour m grand donc $f(x_n) \geqslant 0$ et donc le résultat par densité)
4. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $x \in \partial C$. Donc $x_n \in C^c, x_n \to x$. $\{x_n\}$ et C sont deux convexes disjoints non-vides. Soit $f_n \in E'$ avec $f_n(x_n) \leqslant f_n(c)$ $\forall c \in C$ (par la question précédente). QUitte à extraire, on a $||f_n|| = 1$ $f_n \to f$ (par compacité des boules) donc en passant à la limite dans l'inégalité $f(x) \leqslant f(c)$ $\forall c \in C$. donc $C \subset \overline{C} \subset f^{-1}([f(x), \infty[)$ donc $Int(\overline{C}) \subset Int(f^{-1}([f(x), \infty[)) = f^{-1}(]f(x), \infty[)$ donc comme $x \notin Int(\overline{C})$

   Bien sur $Int(C) \subset Int(\overline{C})$ et réciproquement si $x \in Int(\overline{C})$ alors $x \notin \partial C$ donc $x \in \overline{C} \cap (\partial C)^c = Int(C)$.

   Une forme linéaire non-continue a un noyau C convexe non fermé, donc dense donc $Int(C) = \emptyset \neq E = Int(\overline{C})$.
5. Soit C un convexe de R^n , $x \in \partial C$. Montrons que $N_C(x) \neq \{0\}$. C est convexe et si $x_n \in C^c, x_n \to x$ en séparant $C - x_n$ et 0 par 3. on a $f_n(C) \leqslant f_n(x_n)$ avec $||f_n|| = 1$. Par compacité on extrait $f_n \to f$ qui convient $0 \neq f \in N_C(x)$
6. Cela vient du 3 appliqué à $C - D$

Exercice 2 (cf TD.)

Exercice 3 (cf TD.)

Exercice 4 Transformée de Moreau-Yosida ou Inf-convolution Soit H un espace de Hilbert et $g : H \to \mathbb{R}$ une fonction bornée inférieurement. On pose pour $\epsilon > 0$:

$$g_\epsilon(x) := \inf_{y \in H} g(y) + \frac{1}{2\epsilon}||y - x||^2.$$

1. Montrer que si g est convexe continue alors pout tout $x \in H$ il existe $f \in H$ tel que pour tout $y \in H$, on a

   $$g(y) - g(x) \geqslant \langle f, y - x \rangle.$$

   Pour prendre $F \in N_{Epi(g)}((x, g(x))) - \{0\}$ par l'exercice 1, on vérifie les hypothèses. $\{(x,t) : g(x) < t\} \subset Epi(g)$ est ouvert car g continue (image inverse d'un ouvert $]-\infty, 0[$ par G définie par $G(x,t) = g(x) - t$ continue) Donc $Epi(g)$ d'intérieur non vide. De plus $(x, g(x) - 1/n) \in Epi(g)^c$ et tend vers $(x, g(x)) \in Epi(g)$ donc $(x, g(x)) \in \partial Epi(g)$. Donc il existe $F \neq 0$ avec $F \in N_{Epi(g)}((x, g(x)))$. Par théorème de Riesz, on écrit $F = (f, t) \in H \times \mathbb{R} \simeq (H \times \mathbb{R})'$.
   Donc on a pour tout $(y, \ell) \in Epi(g)$

   $$\langle f, (y - x) \rangle + t(\ell - g(x)) \leqslant 0$$

   En rappelant (TD1) que l'image par (f,t) d'un ouvert est ouvert on a pour $(y, \ell) \in Int(Epi(g))$ une inégalité stricte donc En prenant $(y, \ell) = (x, g(x) + 1/n) \in Int(Epi(g))$ on obtient $t/n < 0$ soit $t < 0$. En remplaçant f par $f/|t|$ on obtient et avec $\ell = g(y)$

   $$\langle f, (y - x) \rangle \leqslant g(y) - g(x)$$

   comme voulu.

2. Pour Montrer que $g_\epsilon \leqslant g$ il suffit de prendre $y = x$ dans l'inf.

3. Montrer que g_ϵ est Lipschitzienne sur toute boule de H en supposant que g est localement bornée, disons par C sur $B(0, R) \ni x, z$. Soit $1 > \eta > 0$ et y avec $g(y) + \frac{1}{2\epsilon}||y - z||^2 \leqslant g_\epsilon(z) + \eta \leqslant g(z) + \eta \leqslant C + \eta$
   On remarque donc que $||y - z||^2 \leqslant (C + 1 - \inf g)2\epsilon =: D^2 < \infty$. l'inf est presque atteint prêt de z. On va donc pouvoir utiliser la lipschitzianité locale du carré.
   On borne :

   $$g_\epsilon(x) \leqslant g(y) + \frac{1}{2\epsilon}||y - x||^2 = g(y) + \frac{1}{2\epsilon}||y - z||^2 + \frac{1}{2\epsilon}\langle 2y - x - z, z - x \rangle$$

   et donc

   $$g_\epsilon(x) \leqslant g_\epsilon(z) + \eta + \frac{1}{2\epsilon}(2D + 2C)||z - x||$$

   en en faisant tendre $\eta \to 0$ et par symétrie $x, z \in B(0, R)$:

   $$|g_\epsilon(x) - g_\epsilon(z)| \leqslant \frac{1}{2\epsilon}(2D + 2C)||z - x||$$

4. Montrons que $g_\epsilon(x) = (g_{\epsilon/2})_{\epsilon/2}(x)$ (propriété de semigroupe). Par les définition et en intervertissant les inf

   $$(g_{\epsilon/2})_{\epsilon/2}(x) = \inf_{y \in H} g_{\epsilon/2}(y) + \frac{1}{\epsilon}||y - x||^2 = \inf_{z \in H} \inf_{y \in H} g(z) + \frac{1}{\epsilon}||z - y||^2 + \frac{1}{\epsilon}||y - x||^2.$$

Il suffit donc de voir $\inf_{y\in H} \frac{1}{\epsilon}||z-y||^2 + \frac{1}{\epsilon}||y-x||^2 = \frac{1}{2\epsilon}||z-x||^2$ Or l'identité du paralellogramme donne :

$$\frac{1}{\epsilon}||z-y||^2 + \frac{1}{\epsilon}||y-x||^2 = \frac{2}{\epsilon}\left\|y - \frac{z+x}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2\epsilon}||z-x||^2 \geqslant \frac{1}{2\epsilon}||z-x||^2.$$

Donc l'inf souhaité est atteint en $y = (x+z)/2$.

Il reste à vérifier que $g_{\epsilon/2}$ est toujous localement bornée, d'où on déduit du 3 que g_ϵ est Lipschitzienne sur toute boule de H (sans hypothèse supplémentaire sur g). Mais en fixant z et $\eta = 1/2$ ce qui fixe un y on obtient

$$g_{\epsilon/2}(x) \leqslant g(z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{\epsilon}(2||y|| + 2R)2R$$

ce qui est une borne local supérieur sur $B(0,R)$ qui complète la borne inférieure supposée dans l'énoncé.

5. Montrons que g_ϵ est semiconcave, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que $g_\epsilon - C||.||^2$ est concave. On prend $C = 1/2\epsilon$ et on remarque que

$$g_\epsilon(x) - C||x||^2 := \inf_{y\in H} g(y) + \frac{1}{2\epsilon}||y||^2 - \frac{1}{\epsilon}\langle y, x\rangle$$

qui est un inf de fonction linéaire en x donc concaves qui est donc concave comme tout inf de fonctions concaves.

6. Montrons que si g est convexe alors g_ϵ est convexe.

En effet si g est convexe $(x,y) \mapsto g(y) + \frac{1}{2\epsilon}||y-x||^2$ est convexe par l''identité du parallélogramme. En prenant l'inf sur un ensemble convexe$H$ (comme en TD à l'ex 2) on obtient bien une fonction convexe.

Montrons qu'alors g_ϵ est différentiable en $x \in H$. Par 1, on a $f_1 \in H$ tel que

$$g_\epsilon(y) - g_\epsilon(x) \geqslant \langle f_1, y-x\rangle.$$

En appliquant 1 à $C||.||^2 - g_\epsilon$, convexe par 5, on a $f_2 \in H$ tel que :

$$C||y||^2 - C||x||^2 + g_\epsilon(x) - g_\epsilon(y) \geqslant \langle f_2, y-x\rangle.$$

Soit en combinant vu $||y||^2 - ||x||^2 = \langle y - x + 2x, y-x\rangle$:

$$C||y-x||^2 - \langle f_2 - 2Cx, y-x\rangle \geqslant g_\epsilon(y) - g_\epsilon(x) \geqslant \langle f_1, y-x\rangle.$$

Or comme y arbitraire on peut prendre $y = x + h/n$ et multiplier par n pour obtenir :

$$C/n - \langle f_2 - 2Cx, h\rangle \geqslant \langle f_1, h\rangle.$$

En faisant $n \to \infty$ et en remplacant h par $-h$ on obteint $2Cx - f_2 = f_1$ et donc

$$C||y-x||^2 + \langle f_1, y-x\rangle \geqslant g_\epsilon(y) - g_\epsilon(x) \geqslant \langle f_1, y-x\rangle.$$

Donc $g_\epsilon(y) - g_\epsilon(x) = \langle f_1, y-x\rangle + o(||y-x||)$ d'où la différentiabilité.

7. Montrons que si g est uniformément continue alors g_ϵ converge uniformément vers g.

Exercice 5 (cf TD)

Exercice 6

Soient H un espace de Hilbert et $v \in B(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. Pour tout $x \in Ker(v)^\perp$, on $||v(x)||_2 = ||x||_2$

2. $v^*vv^* = v^*$
3. $vv^*v = v$
4. Pour tout $x \in Ker(v^*)^\perp$, on $||v^*(x)||_2 = ||x||_2$

On dit que v est une isométrie partielle si (1) est vérifié. (ce qui équivaut donc à v^* isométrie partielle)

On suppose (4) Sur l'orthogonal du noyau $Ker(v^*)^\perp = \overline{Im(v)}$ sur lequel v^* est une isométrie $||v^*(vx)||_2^2 = \langle vv^*vx, vx\rangle = ||vx||_2^2$.

Par polarisation la relation s'étend à $\langle vv^*vx, vy\rangle = \langle vx, vy\rangle$ puis en passant à la limite pour $y \in Ker(v^*)^\perp$, on a

$$\langle vv^*vx, y\rangle = \langle vx, y\rangle$$

Si $y \in Ker(v^*)$ on a $\langle vv^*vx, y\rangle = \langle v^*vx, v^*y\rangle = 0 = \langle x, v^*y\rangle = \langle vx, y\rangle$ donc en décomposant tout $y = y_1 + y_2 \in Ker(v^*)^\perp \oplus Ker(v^*)$ on obtient $\langle vv^*vx, y\rangle = \langle vx, y\rangle$.

Come y est arbitraire $vv^*vx = vx$ d'où (3).

Réciproquement si on a (3), $||v^*(vx)||_2^2 = \langle vv^*vx, vx\rangle = ||vx||_2^2$ donc comme $Ker(v^*)^\perp = \overline{Im(v)}$ en passant à la limite on obtient l'isométrie cherchée. donc (3) et (4) sont equivalentes.

En passant (3) à l'adjoint on a $v^*vv^* = (vv*v)^* = v^*$ soit (2) et donc de même (2) et (3) équivalentes. En appliquant l'équivalence entre (3) et (4) àv^* au lieu de v on obtient (1) équivalent à (2).

Exercice 7 Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé différent de $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F.

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale
2. $||P|| = 1$
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leqslant ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Si P est la projection orthogonale on a vu en cours que P est contractante donc $||P|| \leqslant 1$, de plus si $F \neq \{0\}$ il existe $x \in F$ avec $||x|| = 1$ et comme $P(x) = x$ on déduit $||P|| \geqslant 1$ (car $||P(x)|| = ||x||$).

Si on suppose (2), comme par Cauchy-Schwarz et la def de la norme subordonnée $|\langle P(x), x\rangle| \leqslant ||x||\ ||P(x)|| \leqslant ||P||\ ||x||^2 \leqslant ||x||^2$ on a donc (3)

Supposons donc finalement (3) on montre que $Im(P)^\perp \subset Ker(P)$. Soit $z \in Im(P)^\perp$ et

Soient $t > 0$ et $z_t = z + tP(z)$. $P(z_t) = (1+t)P(z)$ et

$$\langle P(z_t), z_t\rangle = (1+t)\langle P(z), z + tP(z)\rangle = (1+t)t||P(z)||^2 \geqslant 0$$

car $P(z) \in Im(P)$ et $z \in Im(P)^\perp$ sont orthogonaux.

Donc $|\langle P(z_t), z_t\rangle| = \langle P(z_t), z_t\rangle \leqslant ||z_t||^2$ et donc $\langle P(z_t), z_t\rangle \in [0, ||z_t||^2]$ et donc

$$\langle (I-P)(z_t), z_t\rangle \geqslant 0.$$

Or $(I-P)(z_t) = (I-P)(z) + t(I-P)(P(z)) = (I-P)(z)$ et par orthogonalité de z et $P(z)$ on a :

$$\langle (I-P)(z), z + tP(z)\rangle = ||z||^2 + t\langle (I-P)(z), P(z)\rangle = ||z||^2 - t||P(z)||^2$$

et donc on obtient donc $||z||^2 - t||P(z)||^2 \geqslant 0$ soit $||P(z)||^2 \leqslant \frac{||z||^2}{t}$et donc avec $t \to \infty$ on a $||P(z)|| = 0$.

En bilan, $Im(P)^\perp \subset Ker(P)$, et donc en passant à l'othogonal $Ker(P)^\perp \subset (Im(P)^\perp)^\perp = Im(P)$ puisque $Im(P) = F$ est fermé. DOnc soit $x + y \in Im(P) \oplus Im(P)^\perp$ donc la décomposition de H en somme directe orthogonale. On a $P(x+y) = P(x) + P(y) = P(x) = x$ car $y \in Ker(P)$ donc P est bien la projection orthogonale.

Exercice 8 **Polynômes de Laguerre** (cf. TD)