Feuille de TD 5

Espaces de Hilbert, Théorie spectrale.

En général, H sera un espace de Hilbert, $B(H)$ l'ensemble des applications linéaires continue sur H et $I \in B(H)$ désigne l'application identité.

Exercice 1 Soit H un espace de Hilbert et (x_n) convergeant faiblement vers 0. Monter qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que

$$\sup_{j\in[1,k-1]} |\langle x_{n_j}, x_{n_k}\rangle| \leqslant 2^{-k}.$$

En déduire que $||\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{n_k}|| \to 0$.

Exercice 2 Soit $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geqslant 0 \ p.p.\}$.

Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f 1_{\{f\geqslant 0\}}$.

Exercice 3 Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ un opérateur positif.

1. Montrer que pour $a > 0$, $\langle (aI + T).,.\rangle$ est un produit scalaire sur H
2. Soit $f \in H$ montrer qu'il existe $u \in H$ tel que pour tout $g \in H$:
$$\langle (aI + T)u, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$
3. En déduire que $(aI + T)$ est inversible dans $B(H)$, donc $]-\infty, 0[\subset \rho(T)$.

Exercice 4 Soit $T = T^* \in B(H)$

1. Vérifier que $(T-i)^*(T-i) = (T^2+1)$ et en déduire (en utilisant l'exercice précédent) que $T - i$ est inversible.
2. Montrer que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ puis que si T est positif alors $\sigma(T) \subset [0,\infty[$.
3. Si $T = T^*$ et $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}, M = \sup\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}$. Montrer que $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Exercice 5 Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et le shift $S((x_i)_{i\geqslant 0}) = (x_{i+1})_{i\geqslant 0}$, on rappelle que son adjoint est $S^*((x_i)_{i\geqslant 0}) = (0, x_0, x_1, ...)$. On pose $X = S + S^*$ et on cherche à montrer que $\sigma(X) = [-2, 2]$.

1. Montrer que $||X|| \leqslant 2$ et en déduire que $\sigma(X) \subset [-2, 2]$.
2. Montrer que $\langle X^{2n+1}e_0, e_0\rangle = 0$ et que $\langle X^{2n}e_0, e_0\rangle = c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ où c_n est le nombre de Catalan vérifiant la récurrence $c_0 = 1, c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$ (on ne montrera pas la formule explicite bien connue).
3. En déduire que pour $\lambda \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ (en prenant la racine à partie réelle positive)
$$\|((\epsilon i + \lambda)I + X)^{-1}e_0\|^2 = \int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+\lambda)^2 + \epsilon^2}\sqrt{4 - x^2}\frac{dx}{2\pi}$$
(On montrera d'abord que $\langle X^n e_0, e_0\rangle = \int_{-2}^{2} x^n\sqrt{4 - x^2}\frac{dx}{2\pi}$)
4. Conclure en montrant que pour tout $\lambda \in [-2, 2]$ on a
$$\|((\epsilon i + \lambda)I + X)^{-1}e_0\|^2 \to_{\epsilon\to 0} \infty.$$

Exercice 6 Soit $T \in B(H)$, H espace de Hilbert. On suppose que T est un opérateur à trace au sens où dans la base hilbertienne $(f_j)_{j\in J}$,

$$\sum_{j\in J} \langle |T| f_j, f_j\rangle < \infty$$

1. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Montrer que $\sum_{i\in I} \langle |T| e_i, e_i\rangle < \infty$
2. En utilisant la décomposition polaire, montrer que $\sum_{i\in I} |\langle T e_i, e_i\rangle| < \infty$.
3. Montrer que la formule de la norme ne dépend pas de la base :
$$||T||_1 = \sum_{i\in I} \langle |T| e_i, e_i\rangle = \sum_{j\in J} \langle |T| f_j, f_j\rangle.$$
4. Soit $T = u|T|$ la décomposition polaire. Montrer que $V = |T|^{1/2}, U = |T|^{1/2}u^*$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire que V^*V, U^*U sont des opérateurs à traces. (Indication : on pourra montrer que u^* est aussi une isométrie partielle et choisir une base du noyaux de $Ker(u^*)$ et la compléter)
5. En utilisant la formule de polarisation et $T = U^*V$, montrer que la formule pour la trace ne dépend pas de la base : $tr(T) = \sum_{i\in I} \langle T e_i, e_i\rangle = \sum_{j\in J} \langle T f_j, f_j\rangle$.

Exercice 7 Soit $T \in S^1(H)$ et $B \in B(H)$.

1. Soit $(u_k)_{k\in \mathbb{N}}$ une suite bornée et soit une base hilbertienne $(e_n)_{n\in \mathbb{N}}$ dénombrable de $K = \overline{Vect(u_k, |T|^{1/2}(u_k), k \in \mathbb{N})}$. Montrer que l'on peut extraire une sous suite telle que pour tout l : $\langle |T|^{1/2}(u_{n_k}), e_l\rangle \to_{k\to\infty} a_l$. Montrer que $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_l e_l \in K$ et $|T|^{1/2}(u_{n_k}) \to a$. En déduire que T est un opérateur compact.
2. Soit $T = u|T|$ la décomposition polaire. Montrer que $Bu|T|^{1/2}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et en déduire que $BT \in S^1(H)$.
3. Montrer en utilisant une base $(e_n)_{n\in I}$ de H contenant les vecteurs propres de T que $|tr(BT)| \leqslant ||B||||T||_1$.
4. En utilisant $T_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle$, montrer la formule pour la norme d'opérateur :
$$||B|| = \sup\{|tr(BT)| : ||T||_1 \leqslant 1\}.$$
5. Montrer que $J : B \mapsto (T \mapsto tr(BT))$ est une isométrie surjective $J : B(H) \to (S^1(H))'$.
[Indication pour $f \in (S^1(H))'$, considérer $B_f(x) = \sum_{j\in I} e_j f(T_{x,e_j})$]

Exercice 8 Soit $AC^2([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $g \in L^2([0,1], Leb)$ avec :$f(t) = f(0) + \int_0^t g(u)du$. Le théorème de dérivation de Lebesgue montre alors que g est unique p.p. (notée f') On pose alors

$$||f||^2_{AC^2} = |f(0)|^2 + \int_0^1 |g(t)|^2 dt.$$

1. Vérifier que $AC^2([0,1])$ est une espace de Hilbert.
2. Soit $L : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to R$ une fonction continue minorée. Montrer qu'elle définit une fonction $F : AC^2([a,b]) \to]-\infty, \infty]$ s.c.i
$$F(f) = \int_0^1 L(t, f(t), f'(t))dt$$
3. On suppose que pour tout t, $(x,v) \mapsto L(t,x,v)$ est convexe, montrer que F est convexe.
4. On suppose qu'il existe $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ telle que $L(t,x,v) \geqslant \alpha|v|^2 + \beta$ pour tout $(t,x,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Montrer que F admet un minimum sur $AC^2([0,1])$ sous la contrainte $f(0) = A, f(1) = B$ pour $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ fixé.