**Feuille de TD 5**

Propriétés des espaces de Banach.

**Exercice 1**

Soit $E$ l'espace vectoriel $L^2([0,1], Leb)$ muni de la norme $||.||_1$ (induite par $L^1([0,1], Leb)$). et soit $F$ l'espace vectoriel $L^2([0,1], Leb)$ muni de la norme $||.||_2$ usuelle. Montrer que l'application $L : E \to F$ définie par $L(x) = x$ admet un graphe ferme mais qu'elle n'est pas continue. Que peut-on en déduire sur $(E, ||.||_1)$ ?

**Exercice 2**

Soit $(L_n)$ une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach E dans un espace normé F . On suppose que pour chaque $x \in E$, la limite $L(x) := \lim_{n\to\infty} L_n(x)$ existe. Prouver que L est une application linéaire continue.

**Exercice 3**

Soit E un espace de Banach par rapport à deux normes différentes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ . Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2.$$

Montrer que les normes sont équivalentes ; i.e., qu'il existe d ¿ 0 tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_2 \leqslant d\|x\|_1.$$

Fournir un contre-exemple dans le cadre où les mots "espace de Banach" sont remplacés par "evn".

**Exercice 4** Soit $H$ un espace de Hilbert et $(x_n)$ convergeant faiblement vers 0. Monter qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})$ telle que

$$\sup_{j\in[1,k-1]} |\langle x_{n_j}, x_{n_k}\rangle| \leqslant 2^{-k}.$$

En déduire que $||\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_{n_k}|| \to 0$.

**Exercice 5**

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\ell^p(\mathbb{N})(1 < p < +\infty)$, où $x_n = (y_{i,n})_{i\geqslant 0}$. Prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 ssi la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $\ell^p(\mathbb{N})$ et pour chaque $i$ on a $\lim_{n\to\infty} y_{i,n} = 0$.

**Exercice 6**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers $x$ dans $E$ espace de Banach. On pose

$$K_n = \overline{Conv\{x_n, x_{n+1}...\}}.$$

Montrer que $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = \{x\}$. (Indication : pour tout $f \in E'$, montrer que $\bigcap_{n=1}^\infty f(K_n) = \{f(x)\}$).

**Exercice 7** On prend $E := \ell^p(\mathbb{N})$ , $1 < p < +\infty$, et l'on désigne par $e_n$ l'élément de $E$ dont tous les termes sont nuls à part le n-ième, qui vaut 1.

1. Montrer que la suite $(e_n)$ ne converge pas dans la topologie de la norme, mais converge faiblement vers 0.

2. On pose $y_{n,m} := e_n + ne_m$. Montrer que l'ensemble
$$X := \{y_{n,m} : m > n\}$$
est normiquement fermé dans $E$.
3. L'ensemble X admet 0 comme point d'adhérence faible, mais aucune suite dans E converge faiblement vers 0. (L'ensemble de toutes les limites faibles de suites dans E n'est donc pas faiblement fermé.)

**Exercice 8**

Soient $x_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$ des points dans un evn E. Prouver qu'il existe un point $f \in E'$ qui minimise $f \mapsto f(x_0)$ sur l'ensemble $\{f \in E' : ||f|| \leqslant 1, f(x_i) = 0 (i = 1, 2, ..., n)\}$.

**Exercice 9 Propriété de Schur de $\ell^1(\mathbb{N})$.** On veut montrer que dans $\ell^1(\mathbb{N})$ une suite converge faiblement si et seulement si elle converge normiquement. On va utiliser le lemme de Baire.

1. Rappeler pourquoi la convergence normique implique la convergence faible.
2. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{Z}, |z| = 1\}$. $\Omega = \Gamma^{\mathbb{N}}$. Vérifier que $\Omega$ muni de la topologie produit est un espace métrique complet. On écrit $\omega = (Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$.
3. Soit $(f_p)$ une suite tendant faiblement vers 0. Supposons par l'absurde que pour tout $q \geqslant p$ $||f_q||_1 \geqslant 3a$ pour $a > 0$. Posons
$$G_q = \{\omega \in \Omega : \left|\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_q(n)\right| \leqslant a\}$$
et
$$F_p = \cap_{q\geqslant p} G_q.$$
Montrer que $Int(F_p) = \emptyset$.
4. En utilisant le lemme de Baire obtenir $\omega \in \Omega \cap \bigcap_{p\geqslant 1} F_p^c$ et regarder $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Trouver une sous-suite $f_{p_k}$ tel que $\omega(f_{p_k}) \not\to 0$. Conclure.

**Exercice 10**

1. Montrer $\{1_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ est un sous-ensemble fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
2. En déduire que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.
3. Montrer que $T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{](1/n+2),1/(n+1)]}$ définit une isométrie $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to L^\infty([0, 1], Leb)$ et en déduire que $L^\infty([0, 1], Leb)$ n'est pas séparable.

**Exercice 11** Soient F et F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire de E dans F.

1. On suppose que pour toute suite $x_n \to 0$ et tout $f \in F'$ alors $f(T(x_n)) \to 0$. Montrer que T est continue.
2. On ne fait plus l'hypothèse du 1. Montrer que si $T$ est continue pour la topologie faible alors $T$ est continue pour la topologie de la norme. [Indication : On pourra considérer le graphe de T.]

**Exercice 12** Soit $E$ un espace de Banach uniformément convexe et $C$ un convexe fermé (non vide).

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y = P_C(x) \in C$ avec
$$||x - y|| = \inf_{c\in C} ||x - c||.$$
2. Montrer que toute suite minimisante $y_n \in C$ (i.e. $||x - y_n|| \to \inf_{c\in C} ||x - c||$) converge en norme vers $P_C(x)$. (Indication : commencer par montrer qu'elle converge faiblement puis utiliser l'uniforme convexité).
3. Montrer que $P_C$ est uniformément continue sur les bornés de $E$. (Indication : raisonner par l'absurde)