Feuille de TD 5

Espaces de Hilbert, Théorie spectrale.

En général, H sera un espace de Hilbert, $B(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur H et $I \in B(H)$ désigne l'application identité.

Exercice 1 cf TD.

Exercice 2 Soit $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ avec μ σ-fini. On pose $C = \{f \in H : f \geqslant 0 \ p.p.\}$.

Montrons que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f1_{\{f\geqslant 0\}}$.

Voir que C convexe est facile (cf TD). Si $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$

$$C = \{f \geqslant 0 \ p.p.\} = \{f \in L^2 : \forall g \in L^2, g \geqslant 0, \int fg d\mu \geqslant 0\}.$$

(en effet, pour l'inclusion difficile $\supset$, si A_n croissante de mesure fini avec $\cup A_n = \Omega$ $1_{\{f<0\}}1_{A_n}$ est dans H et est positive ou nulle et en prenant $g = 1_{\{f<0\}}1_{A_n}$ on trouve $\int f1_{\{f<0\}}1_{A_n} = 0$ et par convergence monotone vu $-f1_{\{f<0\}}1_{A_n}$ positive croissante, $\int f1_{\{f<0\}}d\mu = 0$ soit $f \geqslant 0$ p.s.) La relation montre que c'est un fermé comme l'intersection pour sur les $g \in C$ des fermés $\{f \in L^2 : \int fg \geqslant 0\}$.

On remarque que

$$\int (f - f1_{\{f\geqslant 0\}})(u - f1_{\{f\geqslant 0\}}) = \int f1_{\{f<0\}}u \leqslant 0$$

pour $u \in C$ (car $f1_{\{f<0\}}f1_{\{f\geqslant 0\}} = 0$ soit donc par caractérisation de la projection sur un convexe fermé $P_C(f) = f1_{\{f\geqslant 0\}}$.

Exercice 3 Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$ un opérateur positif.

1. Soit $a > 0$, $\langle (aI + T).,.\rangle$ est un produit scalaire sur H se déduit facilement de T positif (cf TD, en particulier la séparation vient de la première inégalité du 2 et de la séparation de la norme de H).
2. Comme $a||x||^2 \leqslant \langle (aI + T)x, x\rangle \leqslant (a + ||T||)||x||^2$, le produit scalaire du 1 défini une norme équivalente pour laquelle H est donc aussi complet (mêmes suites de Cauchy et suites convergentes).

   Soit $f \in H$,$\langle f, .\rangle \in H'$ est linéaire continue pour le nouveau produit scalaire, le théorème de représentation de Riesz montre qu'il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $g \in H$:
   $$\langle (aI + T)u, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$
3. On déduit que $(aI + T)$ est une bijection (car 2 dit que pour tout f il existe un unique u tel que $(aI + T)u = f$ linéaire continue, donc par le théorème de l'application ouverte, est inversible dans $B(H)$ (Voici pour une preuve directe de la borne explicite $||(aI+T)^{-1}|| \leqslant a^{-1}$ sans utiliser le chapitre 5 : SOit $u = (a+T)^{-1}f$:
   $$a||(a+T)^{-1}f||^2 \leqslant \langle (a+T)(a+T)^{-1}f, (a+T)^{-1}f\rangle \langle f, (a+T)^{-1}f\rangle \leqslant ||f||||(a+T)^{-1}f||$$
   d'où on déduit $||(a + T)^{-1}f|| \leqslant ||f||/a$ d'où la continuité de l'inverse et donc $a + T$ inversible dans $B(H)$ soit $-a \in \rho(T)$.). Par définition du spectre on a $]-\infty, 0[\subset \rho(T)$.

Exercice 4 Soit $T = T^* \in B(H)$

1. On note $(T-i)^*(T-i) = (T+i)(T-i) = (T-i)(T+i) = (T^2+1)$ or par l'exercice précédent $(T^2+1)^{-1}$ existe car $T^2 = T^*T$ est positif, donc $(T-i)(T+i)(T^2+1)^{-1} = (T^2+1)^{-1}(T+i)(T-i) = Id$. Donc $(T^2+1)^{-1}(T+i) = (T^2+1)^{-1}(T+i)(T-i)(T+i)(T^2+1)^{-1} = (T+i)(T^2+1)^{-1}$ qui est donc à la fois inverse à droite et à gauche de $(T-i)$ et qui est par composition dans $B(H)$. Donc $T-i$ est inversible.
2. On a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ car si $b \neq 0$, car $T-(a+ib)$ pour a, b réel revient à inverser $((T-a)/b-i)b$ et $(T-a)/b$ est autoadjoint donc $((T-a)/b-i)$ est inversible par le 1. Enfin si T est positif alors $\sigma(T) \subset [0, \infty[$ se déduit de la réutilisation de l'exercice précédent.
3. Si $T = T^*$ et $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}, M = \sup\{\langle Tx, x\rangle, ||x|| = 1\}$. on a par les inégalités définissant la norme $-||T|| \leqslant m \leqslant M \leqslant ||T||$ et m, M réel car T autoadjoint. ON Voit que $T-m$ et $M-T$ sont positifs d'où par le 2, $\sigma(T-m) \subset [0, \infty[, \sigma(M-T) \subset [0, \infty[$. Ceci se traduit par $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Exercice 5 (cf TD)

Exercice 6 Soit $T \in B(H)$, H espace de Hilbert. On suppose que T est un opérateur à trace au sens où dans la base hilbertienne $(f_j)_{j\in J}$,

$$\sum_{j\in J} \langle |T| f_j, f_j\rangle < \infty$$

1. Montrons que la formule de la norme ne dépend pas de la base :

$$||T||_1 = \sum_{i\in I} \langle |T| e_i, e_i\rangle = \sum_{j\in J} \langle |T| f_j, f_j\rangle.$$

Par la définition de la racine carré et la formule de Parseval :

$$\langle |T| e_i, e_i\rangle = \||T|^{1/2} e_i\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle |T|^{1/2} e_i, f_j\rangle|^2$$

et de même

$$\langle |T| f_j, f_j\rangle = \sum_{i\in I} |\langle |T|^{1/2} e_i, f_j\rangle|^2$$

Donc $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} |\langle |T|^{1/2} e_i, f_j\rangle|^2 < \infty$ donc la famille est sommable, par Fubini Tonelli, on peut intervertir les sommations :

$$\sum_{j\in J} \langle |T| f_j, f_j\rangle = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} |\langle |T|^{1/2} e_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |\langle |T|^{1/2} e_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{i\in I} \langle |T| e_i, e_i\rangle.$$

2. En utilisant la décomposition polaire, montrer que $\sum_{i\in I} |\langle Te_i, e_i\rangle| < \infty$. Comme par le théorème des bases $\langle T(e_i), e_i\rangle = \sum_{j\in J} \langle |T|^{1/2}(e_i), f_j\rangle\langle f_j, |T|^{1/2} u^* e_i\rangle$ et par Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{i\in I, j\in J} |\langle |T|^{1/2}(e_i), f_j\rangle||\langle f_j, |T|^{1/2} u^* e_i\rangle|\right)^2 \leqslant \sum_{i\in I, j\in J} |\langle |T|^{1/2}(e_i), f_j\rangle|^2 \sum_{i\in I, j\in J} |\langle f_j, |T|^{1/2} u^* e_i\rangle|^2 < \infty$$

car l'inégalité du 1 et

$$\sum_{i\in I, j\in J} |\langle f_j, |T|^{1/2} u^* e_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I, j\in J} |\langle u|T|^{1/2} f_j, e_i\rangle|^2 = \sum_{j\in J} \|u|T|^{1/2} f_j\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} \||T|^{1/2} f_j\|^2 < \infty,$$

comme u isométrie partielle donc contraction. Enfin par sommabilité :

$$\sum_{i\in I} |\langle Te_i, e_i\rangle| \leqslant \sum_{i\in I, j\in J} |\langle |T|^{1/2}(e_i), f_j\rangle||\langle f_j, |T|^{1/2} u^* e_i\rangle| < \infty.$$

3. Soit $T = u|T|$ la décomposition polaire. Montrons que $V = |T|^{1/2}, U = |T|^{1/2}u^*$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire que V^*V, U^*U sont des opérateurs à traces. (Indication : on pourra montrer que u^* est aussi une isométrie partielle et choisir une base du noyaux de $Ker(u^*)$ et la compléter) Comme $V^*V = |T|$ c'est évident pour lui.

   Donc $U^*U = u|T|u^*$ et si $(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne de H étendant une base de $Ker(u^*)$, on a soit $u^*(e_i) = 0$, soit $u^*(e_i) = e_i$ (sur l'orthogonal du noyau $Ker(u^*)^\perp = \overline{Im(u)}$ sur lequel u^* est une isométrie car $uu^*u = u$ donc $||u^*(ux)||_2^2 = \langle uu^*ux, ux\rangle = ||ux||_2^2$. En effet, pour montrer la relation $uu^*u = u$ on utilise que sur $Ker(u)^\perp = \overline{Im(u^*)}$ u est une isométrie donc $||u(u^*x)||_2^2 = \langle u^*uu^*x, u^*x\rangle = ||ux||_2^2$ donc$\langle u^*uu^*x, f\rangle = \langle u^*x, f\rangle$ pour f dans $Ker(u)^\perp$ mais la relation est évidente sur $Ker(u)$ donc par somme directe pour tout $f \in H$ donc $u^*uu^* = u^*$ et la relation voulue $uu^*u = u$ vient en passant à l'adjoint. Autrement dit on vient de voir que u est une isométrie partielle ssi u^* l'est aussi.)

   Donc par les 2 valeurs possibles $u^*(e_i) = 0$, $u^*(e_i) = e_i$, on a

$$\sum \langle U^*Ue_i, e_i\rangle \leqslant \sum \langle |T|e_i, e_i\rangle < \infty$$

   donc $U^*U \in S^1(H), U \in S^2(H)$.

   De même si $U, V \in S^2(H)$ $U^*V = u|U^*V|$ la décomposition polaire on a $\langle |U^*V|e_i, e_i\rangle = \langle Ve_i, Uue_i\rangle \leqslant ||Ve_i||||Uue_i||$ Donc par Cauchy-Schwarz en ayant choisi (e_i) une base hilbertienne étendant celle de $Ker(u)$ (pour avoir $ue_i = 0$ ou $ue_i = e_i$) :

$$\left(\sum_{i\in I}\langle |U^*V|e_i, e_i\rangle\right)^2 \leqslant \sum_{i\in I}||Ve_i||^2 \sum_{i\in I}||Uue_i||^2 \leqslant ||V||_2^2 \sum_{i\in I}||Ue_i||^2 = ||V||_2^2||U||_2^2 < \infty$$

   donc $U^*V \in S^1(H)$ et $tr(U^*V)$ est donc bien définie et donne clairement un produit scalaire rendant $S^2(H)$ un espace pré-hilbertien (la complétude est laissée en exo en montrant $||U|| \leqslant ||U||_2$).

4. En utilisant la formule de polarisation et $T = U^*V$, montrons que la formule pour la trace ne dépend pas de la base : $tr(T) = \sum_{i\in I}\langle Te_i, e_i\rangle = \sum_{j\in J}\langle Tf_j, f_j\rangle$.

   Si $T = U^*V \in S^1(H)$ avec $V = |T|^{1/2}, U = |T|^{1/2}u^* \in S^2(H)$ vu plus haut, donc $U_k = V + i^kU \in S^2(H)$, donc par définition $U_k^*U_k \in S^1(H)$. Comme l'espace est préhilbertien et par polarisation :

$$tr(T) = tr(U^*V) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k||V + i^kU||_2^2 = \sum_{i\in I}\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\langle U_k^*U_ke_i, e_i\rangle.$$

   et la dernière formule ne fait intervenir que $||U_k^*U_k||_1$ qu'on a déjà vérifié ne pas dépendre de la base, donc de même pour $tr(T)$. Comme $T^* = V^*U$ est de la même forme on voit $T^* \in S^1(H)$.

Exercice 7 Soit $T \in S^1(H)$ et $B \in B(H)$.

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et soit une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable de $K = \overline{Vect(u_k, |T|^{1/2}(u_k), k \in \mathbb{N})}$. Montrer que $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_le_l \in K$ et $|T|^{1/2}(u_{n_k}) \to a$. En déduire que T est un opérateur compact. Quitte à extraire on peut supposer que $\langle |T|^{1/2}(u_k), e_0\rangle$ converge, et en extrayant diagonalement on obtient pour tout l $\langle |T|^{1/2}(u_{n_k}), e_l\rangle \to a_l$. Montrons que $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_le_l \in K$ et $|T|^{1/2}(u_{n_k}) \to a$.

$$|| \, |T|^{1/2}(u_{n_k}) - \sum_{l=0}^{K} a_le_l \, ||^2 \leqslant \sum_{l=K+1}^{\infty} |\langle |T|^{1/2}(u_{n_k}), e_l\rangle|^2 + \sum_{l=0}^{K} |\langle |T|^{1/2}(u_{n_k}), e_l\rangle - a_l)|^2 \leqslant \epsilon/3 + \sum_{l=K+1}^{\infty} |\langle |T|^{1/2}(u_{n}$$

pour K fixé et k assez large. De plus, par la formule du produit scalaire dans une base puis Cauchy-Scwharz :

$$\begin{aligned}\sum_{l=K+1}^{\infty}|\langle|T|^{1/2}(u_{n_k}),e_l\rangle|^2 &= \sum_{l=K+1}^{\infty}|\sum_i\langle e_i,u_{n_k}\rangle\langle|T|^{1/2}(e_i),e_l\rangle|^2\\ &\leqslant \sum_{l=K+1}^{\infty}|\sum_i\langle e_i,u_{n_k}\rangle|^2\sum_i|\langle|T|^{1/2}(e_i),e_l\rangle|^2\\ &= ||u_{n_k}||^2\sum_{l=K+1}^{\infty}|||T|^{1/2}(e_l)||^2 \leqslant C\sum_{l=K+1}^{\infty}\langle|T|(e_l),e_l\rangle\leqslant\epsilon/3\end{aligned}$$

car la suite est bornée (disons par C) et ceci tend donc vers 0 uniformément en k, d'où $||\ |T|^{1/2}(u_{n_k})-\sum_{l=0}^K a_le_l\ ||^2\leqslant 2\epsilon/3$, en particulier $||\sum_{l=0}^K a_le_l\ ||\leqslant |||T|^{1/2}||C+\sqrt{\epsilon}$ et donc$\sum|a_l|^2=\sup_K||\sum_{l=0}^K a_le_l\ ||^2$ est fini et on obtient donc pour K,k grand $||\ |T|^{1/2}(u_{n_k})-\sum_{l=0}^\infty a_le_l\ ||^2\leqslant\epsilon$ et donc $|T|^{1/2}(u_{n_k})$ converge, donc comme la suite bornée est arbitraire $|T|^{1/2}$ est compact et $T=u|T|^{1/2}|T|^{1/2}\in K(H)$ (car $K(H)$ est un idéal à gauche, cf DM.)

2 Soit $T=u|T|$ la décomposition polaire. Montrons que $Bu|T|^{1/2}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et en déduire que $BT\in S^1(H)$.
Soit e_i une base , on a $\sum_{i\in I}||Bu|T|^{1/2}(e_i)||^2\leqslant||B||^2||u||^2\sum_{i\in I}|||T|^{1/2}(e_i)||^2<\infty$ donc $U^*:=Bu|T|^{1/2}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (donc aussi U par l'exo précédent), donc en multipliant par $|T|^{1/2}$ aussi Hilbert-Schmidt on déduit $BT=U^*|T|^{1/2}\in S^1(H)$ comme à la fin de la question 3 de l'exo précédent.

3 Montrons en utilisant une base hilbertienne $(e_n)_{n\in I}$ de H contenant les vecteurs propres de $|T|$ (qui existe car T donc $|T|$ est un opérateur compact et par le cours) que $|tr(BT)|\leqslant||B||||T||_1$.
On a $\lambda_i=\langle|T|e_i,e_i\rangle$ les valeurs propres de $|T|=u^*T\in K(H)$,

$$|tr(BT)|=|\sum_{i\in I}\langle|T|e_i,uB^*e_i\rangle|=|\sum_{i\in I}\lambda_i\langle e_i,uB^*e_i\rangle|\leqslant\sum_{i\in I}\langle|T|e_i,e_i\rangle||Bu^*||=||T||_1||Bu^*||\leqslant||T||_1||Bu||$$

4 En utilisant $T_{x,y}(z)=x\langle y,z\rangle$, montrons la formule pour la norme d'opérateur :

$$||B||=\sup\{|tr(BT)|:||T||_1\leqslant 1\}.$$

On a déja $\geqslant$ en passant au sup la question précédente :

$$||B||\geqslant\sup\{|tr(BT)|:||T||_1\leqslant 1\}.$$

Voyons que l'on a égalité Il suffit de noter que si $T_{x,y}=x\langle y,.\rangle$ en utilisnat la définition de la trace puis la formule pour le produit scalaire dans une base :

$$tr(BT_{x,y})=\sum_i\langle e_i,B(x)\rangle\langle y,e_i\rangle=\langle y,B(x)\rangle$$

et que (en prenant $C=u^*$ l'adjoint de l'isométrie partielle de la décomposition polaire de $T_{x,y}$)

$$||T_{x,y}||_1\leqslant\sup_{||C||\leqslant 1}|tr(CT_{x,y})|=\sup_{||C||\leqslant 1}|\langle y,C(x)\rangle|\leqslant||x||\ ||y||$$

donc si $||x||,||y||\leqslant 1$, $||T_{x,y}||_1\leqslant 1$ donc

$$\sup\{|tr(BT)|:||T||_1\leqslant 1\}\geqslant\sup\{|\langle y,B(x)\rangle|:||x||,||y||\leqslant 1\}=||B||$$

5 Montrons que $J : B \mapsto (T \mapsto tr(BT))$ est une isométrie surjective $J : B(H) \to (S^1(H))'$.
La question précédente montre l'isométrie et il reste à voir la surjectivité.
Si $f \in (S^1(H))'$. On pose

$$B_f(x) = \sum_{i,j \in I} e_j f(T_{e_i,e_j})\langle e_i, x\rangle$$

Or pour vérifier que ceci est bien défini, on calcule

$$||B_f(x)||^2 = \sum_{j\in J} ||\sum_i f(T_{e_i,e_j})\langle e_i, x\rangle||^2 = \sum_{j\in J} |f(T_{x,e_j})|^2$$

car $\sum_i f(T_{e_i,e_j})\langle e_i, x\rangle = f(T_{x,e_j})$ étant donné la continuité de $x \in H \mapsto T_{x,y} \in S^1(H)$ établie plus haut. Mais de même pour tout $y \in H$

$$|\sum_{j\in J} f(T_{x,e_j})\langle y, e_j\rangle| = |f(T_{x,y})| \leqslant ||f||_{S^1(H)'}||x||||y||$$

donc par la dualité dans $||\ell^2(J)$ et l'isométrie une fois une base fixée :

$$\sum_{j\in J} |f(T_{x,e_j})|^2 \leqslant ||f||^2_{S^1(H)'}||x||^2$$

On obtient la finitude qui permet de voir B_f bien définie et $||B_f(x)|| \leqslant ||f||_{S^1(H)'}||x||$, soit $||B_f||_{B(H)} \leqslant ||f||_{S^1(H)'}$. Enfin, on a en prenant $(f_j)_{j\in J}$ n'importe quelle base hilbertienne (bientôt celle de diagonalisation de $|T|$)

$$J(B_f)(T) = tr(B_fT) = \sum_{j\in J}\langle B_fT(f_j), f_j\rangle = \sum_{i\in I, j\in J} f(T_{T(f_j),e_i})\langle e_i, f_j\rangle = \sum_{j\in J} f(T_{T(f_j),f_j}) = f(T)$$

l'avant dernière somme ayant déjà été justifiée par continuité de $T_{y,.}$ et la dernière car $T = \sum_{j\in J} T_{T(f_j),f_j}$ converge dans $S^1(H)$ si on choisit f_j base de diagonalisation de $|T|$. En effet on a $T = u|T|$ et on a vu $|T| = \sum_{j\in J} T_{|T|(f_j),f_j}$ en norme de $K(H)$ dans le théorème du cours mais si $F \subset J$ fini, le calcul des valeurs propores dans ce théorème pour $|T| - \sum_{j\in F} T_{|T|(f_j),f_j}$ donne

$$||\ |T| - \sum_{j\in F} T_{|T|(f_j),f_j}||_1 = \sum_{j\in J-F} \langle |T|f_j, f_j\rangle \to_{F\to J} 0.$$

Ceci montre que J est surjective car $J(B_f) = f$.

Exercice 8 (cf TD).